Análise não Gausseana em dimensão 1

José Gomes, Romana Sousa e José Luis Silva*
Universidade da Madeira
9000-390 Funchal
Portugal

Resumo

O presente trabalho tem por objectivo efectuar uma abordagem elementar a alguns espaços de funções teste e funções generalizadas no contexto da análise não Gausseana. Assim, vamos construir uma família de espaços nucleares de funções teste $\mathcal{N}_\lambda^\beta$, $\beta \in [0,1]$, bem como a respectiva família dual $\mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$ relativamente ao espaço de Hilbert $L^2(\lambda)$, onde λ é uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$. Estes espaços admitem uma caracterização em termos de certas transformações integrais. No caso particular do espaço $\mathcal{N}^{-1}$, vamos definir um tipo de produto - o produto de Wick -, o qual é objecto de aplicações em diferentes áreas da Matemática.

1 Introdução

A análise Gauseana e, em particular, a análise ruído branco introduzidos há mais de vinte anos, tornaram-se instrumentos matemáticos com uma larga aplicação aos problemas da matemática, e matemática-física. Para uma revista sobre os 20 anos de análise ruído branco ver [14], assim como [5], [8] e referências neles citadas. O ponto essencial nessa construção é uma decomposição em caos ou decomposição ortogonal do espaço L^2.

Diferentes extensões destes resultados foram obtidas por Berezansky et al. [6]. A partir de uma família de operadores de campo foi construída uma decomposição ortogonal relativamente às medidas espectrais. Uma outra generalização foi

*Apoio da FCT, Portugal

obtida em [2] para medidas de probabilidade com densidade suave. Esta generalização foi obtida por intermédio de uma decomposição biortogonal, a qual é a generalização natural da decomposição ortogonal em análise Gausseana. Para uma apresentação sistemática destes resultados ver [1].

Kondratiev et al. [13] consideraram medidas de probabilidade não degeneradas com transformada de Laplace analítica. Nestas condições é possível cobrir as medidas de tipo Poisson. Usando o sistema de Appell $(\mathbb{P}^\lambda, \mathbb{Q}^\lambda)$ de polinómios de Appell $\mathbb{P}^\lambda$ e o sistema de funções generalizadas $\mathbb{Q}^\lambda$, adequadamente associados à medida λ, obtiveram entre outros:

- construção, descrição e caracterização dos espaços de funções teste, assim como de funções generalizadas,
- extensão do cálculo de Wick neste contexto.

Neste trabalho construimos os resultados obtidos em [13] quando o tripleto de Schwartz $S'(\mathbb{R}) \supset L^2(\mathbb{R}) \supset S(\mathbb{R})$ se reduz ao tripleto $\mathbb{R} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{R}$. Isto sugere o título deste trabalho. Como exemplos, apresentamos as medidas de Poisson, Gama e Gausseana.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Secção 2 construímos o sistema de polinómios de Appell $\mathbb{P}^\lambda$ associados a uma medida de probabilidade λ em $\mathbb{R}$, a qual satisfaz determinadas hipóteses, ver Hipótese 1, 2 em baixo. Na Secção 3 introduzimos o sistema de funções generalizadas $\mathbb{Q}^\lambda$ associado a λ, de tal forma que os dois sistemas $\mathbb{P}^\lambda$ e $\mathbb{Q}^\lambda$ são biortogonais relativamente a $L^2(\lambda)$. Na Secção 4 construímos o espaço nuclear de funções teste $\mathcal{N}_\lambda^\beta$, $\beta \in [0,1]$ associado a λ, bem como o seu dual $\mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$ relativamente a $L^2(\lambda)$. Na Secção 5 caracterizamos os espaços $\mathcal{N}_\lambda^\beta, \mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$ por intermédio de duas transformadas integrais e, finalmente, na Secção 6 apresentamos o produto de Wick e cálculo de Wick de neste contexto.

2 Polinómios de Appell associados a uma medida de probabilidade

Nesta secção introduzimos o sistema de polinómios de variável real, denominados *polinómios de Appell* [3], associados a uma medida de probabilidade λ em $\mathbb{R}$, à custa dos quais se escrevem os elementos dos espaços de funções teste que consideraremos. Vamos restringir a nossa investigação a uma classe especial de medidas λ sobre $\mathbb{R}$. A primeira das quais diz respeito à analiticidade da sua transformada de Laplace, denotada por $l_\lambda(\cdot)$:

$$l_\lambda(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} d\lambda(x) = \mathbb{E}_\lambda(e^{z\cdot}), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Hipótese 1 *A transformada de Laplace de λ é uma função analítica em torno da origem. A classe destas medidas é denotada por $\mathcal{M}_a(\mathbb{R})$.*

Uma descrição equivalente da classe $\mathcal{M}_a(\mathbb{R})$ é dada na seguinte proposição cujos detalhes da sua prova está no Apêndice A.

Proposição 1 *Seja λ uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\lambda \in \mathcal{M}_a(\mathbb{R})$,
2. $\exists C, K > 0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \left| \int_{\mathbb{R}} x^n d\lambda(x) \right| < n! C^n K$,
3. $\exists \varepsilon > 0 : \int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon |x|} d\lambda(x) < \infty$.

De seguida vamos formular a segunda hipótese sobre λ a qual será usada na Secção 3, nomeadamente para garantir que o conjunto dos polinómios sobre $\mathbb{R}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}, \lambda) =: L^2(\lambda)$. De referir que esta condição na sua primeira versão em [13] revelou-se insuficiente como demonstra o contra exemplo apresentado em [10].

Hipótese 2 $\forall O \subset \mathbb{R}$ *aberto não vazio, tem-se* $\lambda(O) > 0$.

Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos a exponencial normalizada relativamente à medida λ, também designada por *exponencial de Wick*, por

$$e_\lambda(z; .) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto e_\lambda(z; x) := \frac{e^{zx}}{l_\lambda(z)}.$$

Dado que $l_\lambda(0) = 1$, então existe uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{C}$ onde $e_\lambda(\cdot; x)$ é dada por

$$e_\lambda(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} P_n^\lambda(x), \quad \forall z \in V,$$

com $P_n^\lambda(x) = \frac{d^n}{dz^n} e_\lambda(z; x)|_{z=0}$. As funções $P_n^\lambda(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}_0$ são polinómios de grau n também conhecidos por polinómios de Appell, ver [3]. O conjunto $\mathbb{P}^\lambda :=$

$\{P_n^\lambda(\cdot),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ denomina-se *sistema de polinómios de Appell* associado à medida λ.

Vamos coleccionar algumas propriedades dos polinómios $P_n^\lambda(\cdot)$ cuja demostração se deixa a cargo do leitor ou, no caso mais geral, pode ser consultada em [13]. Ver também [12] para uma generalização.

Proposição 2 *Os polinómios de Appell satisfazem as seguintes propriedades:* $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $\frac{d}{dx} P_n^\lambda(x) = n P_{n-1}^\lambda(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $P_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k P_{n-k}^\lambda(0)$.
3. $x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k^\lambda(x) M_{n-k}^\lambda$, *onde* $M_n^\lambda := \int_{\mathbb{R}} x^n d\lambda(x)$.
4. $P_n^\lambda(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k^\lambda(x) y^{n-k}$.
5. $\mathbb{E}_\lambda(P_n^\lambda(\cdot)) = \delta_{n0}$, *onde* δ_{ij} *é a função delta de Kronecker.*
6. *Para qualquer* $\varepsilon > 0$, *tal que* $e_\lambda(\cdot; x)$ *é analítica em* $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq \varepsilon\}$, *existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que* $|P_n^\lambda(x)| \leq C_\varepsilon n! \varepsilon^{-n} e^{\varepsilon|x|}$.

3 Sistema de Appell dual

Consideremos o espaço de Hilbert $L^2(\lambda)$ das funções complexas mensuráveis de variável real cujo quadrado do módulo é λ-integrável assim como o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinómios em $\mathbb{R}$ com coeficientes complexos. Usando a Proposição 2-3. podemos escrever $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ na forma

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} |\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{\varphi}_k P_k^\lambda(x),\ \tilde{\varphi}_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Dado que λ admite os momentos de todas as ordens, então se $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é claro que $\varphi \in L^2(\lambda)$. Por outro lado, a Hipótese 2 garante que a inclusão $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\lambda)$ é injectiva. Assim, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é um subespaço denso em $L^2(\lambda)$.

Em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ define-se a seguinte noção de convergência: uma sucessão de polinómios $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ converge para $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ se e só se a sucessão $(n_{\varphi_i})_{i\in\mathbb{N}}$ do grau dos polinómios φ_i é limitada e os coeficientes convergem termo a termo.

Consideremos o operador de derivação de ordem k, $k \in \mathbb{N}_0$, denotado por ∇^k definido em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ por

$$(\nabla^k \varphi)(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}, \quad \varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

É claro que ∇^k é um operador contínuo para a noção de convergência anterior.

Seja $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$ o dual de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ relativamente a $L^2(\lambda)$, i.e., $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$ é o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ os quais são dados em termos do produto interno em $L^2(\lambda)$. Simbolicamente

$$\Phi(\varphi) =: \langle \varphi, \Phi \rangle = (\varphi, \bar{\Phi})_{L^2(\lambda)}, \quad \forall \Phi \in \mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R}),\ \varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

A aplicação bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ também se chama *par dual* entre $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e os elementos de $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$ chamam-se *funções generalizadas* ou *distribuições*. Assim, temos a seguinte a cadeia de espaços

$$\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R}) \supset L^2(\lambda) \supset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Dado que ∇^k é contínuo, então o seu adjunto $(\nabla^k)^* : \mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$ é tal que

$$\langle \varphi, (\nabla^k)^* \Phi \rangle = \langle \nabla^k \varphi, \Phi \rangle, \quad \forall \Phi \in \mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R}),\ \varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Como $1 \in \mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$, então temos uma família de elementos em $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$ dada por $Q_k^\lambda := (\nabla^k)^* 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. O conjunto $\mathbb{Q}^\lambda := \{Q_k^\lambda = (\nabla^k)^* 1,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ denomina-se *sistema de Appell dual* associado a λ.

Proposição 3 *O sistema de polinómios de Appell $\mathbb{P}^\lambda$ e o sistema de Appell dual $\mathbb{Q}^\lambda$ são biortogonais em relação a $L^2(\lambda)$ e a seguinte relação é válida*

$$\langle P_n^\lambda, Q_m^\lambda \rangle = n! \delta_{mn}, \quad \forall P_n^\lambda \in \mathbb{P}^\lambda,\ Q_m^\lambda \in \mathbb{Q}^\lambda.$$

Prova. Usando a relação 5 da Proposição 2 e a definição de P_n^λ temos

$$\begin{aligned}
\langle P_n^\lambda, Q_m^\lambda \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (\nabla^m P_n^\lambda)(x) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \binom{n}{m} m! \left(\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} \frac{e^{zx}}{l_\lambda(z)} \right)\bigg|_{z=0} d\lambda(x) \\
&= n! \delta_{mn}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4 *Consideremos em $\mathbb{R}$ a medida $d\lambda(x) = \rho(x)dx$ onde $\rho > 0$ é de classe C^∞ de tal forma que as Hipótese 1 e 2 sejam verdadeiras. Neste caso o adjunto do operador de derivação é dado por*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^* f(x) = -\left(\frac{d}{dx} + \beta(x)\right) f(x), \quad f \in C^1(\mathbb{R}),$$

onde β é a derivada logarítmica da medida λ a qual é dada por $\beta = \frac{\rho'}{\rho}$. Neste contexto, podemos calcular o sistema de Appell dual $\mathbb{Q}^\lambda$ e temos

$$Q_n^\lambda(x) = (-1)^n \frac{\rho^{(n)}(x)}{\rho(x)}$$

o qual pode ser calculado facilmente por indução.

Os próximos exemplos são de alguma forma "clássicos" pela quantidade de aplicações existentes em diferentes áreas da matemática.

Exemplo 5 (medida Gausseana) *Consideremos a medida Gausseana μ em $\mathbb{R}$, cuja transformada de Laplace é dada por $l_\mu(z) = e^{z^2/2}$ e o espaço $L^2(\mu)$. Associado à medida Gausseana, existe um sistema de polinómios ortogonais, denominados polinómios de Hermite, cuja função geradora é*

$$e_\mu(z;x) = \frac{e^{zx}}{l_\mu(z)} = e^{zx - z^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n^\mu(x).$$

Temos a seguinte relação de ortogonalidade $(H_n^\mu, H_m^\mu)_{L^2(\mu)} = n!\delta_{nm}$. Neste caso os dois sistemas $\mathbb{P}^\lambda$ e $\mathbb{Q}^\lambda$ coincidem e temos um só sistema de polinómios o qual é ortogonal.

Exemplo 6 (medida de Poisson) *A medida de Poisson π_r, $r > 0$ em $\mathbb{R}$ tem transformada de Laplace dada por $l_{\pi_r}(z) = e^{r(e^z - 1)}$. O espaço de Poisson $L^2(\pi_r)$ admite uma decomposição ortogonal em termos dos polinómios de Charlier. A função geradora destes polinómios é*

$$e_{\pi_r}(z;x) = e^{x\log(1+z) - rz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} C_n^{\pi_r}(x).$$

A seguinte relação de ortogonalidade é válida $(C_n^{\pi_r}, C_m^{\pi_r})_{L^2(\pi_r)} = r^n n!\delta_{nm}$.

Exemplo 7 (medida Gamma) *Para cada $t > 0$ a medida Gama μ_Γ^t em $\mathbb{R}$ define-se por intermédio da sua transformada de Laplace por $l_{\mu_\Gamma^t}(x) = e^{-t\log(1-x)}$, $x < 1$. Consideremos a função geradora dos polinómios de Laguerre*

$$e_{\mu_\Gamma^t}(z;x) = \exp\left(x\frac{z}{z-1} - t\log(1-z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} L_n^{\mu_\Gamma^t}(x). \tag{2}$$

Por um lado temos $(e_{\mu_\Gamma^t}(z;\cdot)\overline{e_{\mu_\Gamma^t}(w;\cdot)})_{L^2(\mu_\Gamma^t)} = e^{-t\log(1-zw)}$. Por outro lado, usando a igualdade (2) e a fórmula para $\frac{d^n}{dt^n}e^{f(t)}$ (e.g. [7]) chagamos à seguinte propriedade de ortogonalidade para os polinómios de Laguerre: $(L_n^{\mu_\Gamma^t}, L_m^{\mu_\Gamma^t})_{L^2(\mu_\Gamma^t)} = (n!)^2 C_{n,t}\delta_{mn}$, onde $C_{n,t}$ é dada por

$$C_{n,t} = \sum_{\substack{i_1+2i_2+\ldots+ki_k=n\\ i_1,\ldots,i_k\in\mathbb{N}_0}} \frac{1}{i_1!\ldots i_k!}\frac{1}{2^{i_2}\ldots k^{i_k}} t^{i_1+\ldots+i_k}.$$

Deste modo o espaço $L^2(\mu_\Gamma^t)$ possui um sistema ortogonal formado pelos polinómios de Laguerre, onde a relação de ortogonalidade tem uma natureza diferente dos exemplos anteriores.

Vamos agora caracterizar o espaço $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$.

Teorema 8 *Para todo o elemento $\Phi \in \mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$, existe uma única sucessão $(\Phi_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ tal que*

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k Q_k^\lambda. \tag{3}$$

Inversamente, toda a série da forma (3) gera uma função generalizada em $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$.

Prova. Seja $\Phi \in \mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$ arbitrário. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, consideremos os números complexos dados por $\Phi_k := \frac{1}{k!}\langle P_k^\lambda, \Phi\rangle$. Consideremos a aplicação em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} k!\varphi_k\Phi_k \in \mathbb{C}.$$

Dado que esta é uma aplicação linear contínua, a qual é dada pelo produto interno em $L^2(\lambda)$, então definimos um elemento em $\mathcal{P}'_\lambda(\mathbb{R})$, o qual denotamos por $\Psi = \sum_{k=0}^\infty \Phi_k Q_k^\lambda$. Assim, Ψ é tal que

$$\forall\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \langle\varphi, \Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k!\varphi_k\Phi_k = \langle\varphi, \Phi\rangle.$$

Daqui resulta que $\Psi = \Phi$. É evidente que a representação para Φ é única.

Inversamente, suponhamos que $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k Q_k^{\lambda}$, $\Phi_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ com vista a provarmos que $\Phi \in \mathcal{P}'_{\lambda}(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ da forma $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k P_k^{\lambda}$. Então

$$\langle \varphi, \Phi \rangle = \sum_{k=0}^{n} k! \varphi_k \Phi_k = (\varphi, \overline{\Phi})_{L^2(\lambda)}.$$

Esta aplicação é obviamente linear e também é contínua na topologia de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, sendo dada pelo produto interno em $L^2(\lambda)$, logo define um elemento em $\mathcal{P}'_{\lambda}(\mathbb{R})$.
■

4 Espaços de funções teste e de funções generalizadas

Dados $\beta \in [0, 1]$ e $q \in \mathbb{N}_0$, introduzimos em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ uma norma Hilbertenana por

$$|\varphi|_{q,\beta,\lambda}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi_n|^2.$$

O completado de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ na norma $|\cdot|_{q,\beta,\lambda}$, denota-se por $\mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta}$, pelo que $\mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta}$ inclui densamente $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. O espaço $\mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta}$ é um espaço de Hilbert para o produto interno dado por

$$(\varphi, \psi)_{q,\lambda}^{\beta} := \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} \varphi_n \overline{\psi}_n,$$

admitindo a representação

$$\mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta} = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_n^{\lambda},\ |\varphi|_{q,\beta,\lambda}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi_n|^2 < \infty \right\}.$$

Temos ainda que $L^2(\lambda) \supset \mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta}$, o que resulta da Hipótese 2 sobre λ, sendo a inclusão densa. Deste modo obtemos a seguinte cadeia de espaços de Hilbert:

$$L^2(\lambda) \supset \mathcal{H}_{0,\lambda}^{\beta} \supset \ldots \supset \mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta} \supset \mathcal{H}_{q+1,\lambda}^{\beta} \supset \ldots \qquad (4)$$

Não é difícil de verificar que se $p > q$, então o operador de injecção $i_{p,q} : \mathcal{H}_{p,\lambda}^{\beta} \to \mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta}$ é de Hilbert-Schmidt, i.e., a norma de Hilbert-Schmidt de $i_{p,q}$ é finita. Dado

$\beta \in [0,1]$ o espaço de funções teste associado a λ define-se por

$$\mathcal{N}_\lambda^\beta := \bigcap_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{q,\lambda}^\beta,$$

o qual é um espaço nuclear.

Proposição 9 *1. Toda a função teste $\varphi \in \mathcal{N}_\lambda^1$ possui uma única extensão ao conjunto $\mathbb{C}$ tal que φ é uma função inteira do tipo mínimo e de ordem de crescimento 1, i.e., $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira e para todo $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $|\varphi(z)| \leq K e^{\varepsilon|z|}$.*

2. Combinando 1. anterior com a 6. da Proposição 2 temos a seguinte majoração: dado $q \in \mathbb{N}_0$, então se $\varepsilon > 0$ é tal que $2^{-q}\varepsilon^{-2} < 1$ existe $K > 0$ tal que

$$|\varphi(z)| \leq K|\varphi|_{q,1,\lambda} e^{\varepsilon|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

É fácil verificar que se $\beta \in [0,1)$, então $e_\lambda(z;\cdot) \in \mathcal{N}_\lambda^\beta$, $\forall z \in \mathbb{C}$ mas no caso $\beta = 1$ temos $e_\lambda(z;\cdot) \in \mathcal{H}_{q,\lambda}^1$ somente se $2^q|z|^2 < 1$.

Dada a inclusão $\mathcal{H}_{q,\lambda}^\beta \subset L^2(\lambda)$ ser densa, então utilizando o procedimento conhecido na literatura por *rigged Hilbert spaces*, ver por exemplo [4], o qual denominamos por *tripletos de espaços de Hilbert*. Isto corresponde a calcular o dual de $\mathcal{H}_{q,\lambda}^\beta$ de tal forma que os funcionais tenham uma representação em termos do produto interno em $L^2(\lambda)$. Não vamos aqui reproduzir este precesso, os interessados podem consultar a bibliografia sobre este assunto. O tripleto resultante é

$$\mathcal{H}_{-q,\lambda}^{-\beta} \supset L^2(\lambda) \supset \mathcal{H}_{q,\lambda}^\beta.$$

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{-q,\lambda}^{-\beta}$ o qual corresponde a completar $L^2(\lambda)$ relativamente à norma $|\cdot|_{-q,-\beta,\lambda}$, admite a seguinte representaço

$$\mathcal{H}_{-q,\lambda}^{-\beta} = \left\{ \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n Q_n^\lambda,\ \Phi_n \in \mathbb{C} |\ |\Phi|_{-q,-\beta,\lambda}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} |\Phi_n|^2 < \infty \right\}.$$

Pela teoria geral de dualidade, ver por exemplo [15] o dual de $\mathcal{N}_\lambda^\beta$ relativamente a $L^2(\lambda)$ é dado por

$$\mathcal{N}_\lambda^{-\beta} = \bigcup_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{-q,\lambda}^{-\beta}.$$

A cadeia (4) dá lugar à seguinte cadeia

$$\mathcal{N}_\lambda^{-\beta} \supset \ldots \supset \mathcal{H}_{-q,\lambda}^{-\beta} \supset \ldots \supset L^2(\lambda) \supset \ldots \supset \mathcal{H}_{q,\lambda}^{\beta} \supset \ldots \supset \mathcal{N}_\lambda^{\beta}.$$

Exemplo 10 (Derivada de Radon-Nikodym generalizada) *Queremos definir a função generalizada $\rho_\lambda(z,\cdot) \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\langle\varphi, \rho_\lambda(z,\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+z)d\lambda(x), \quad \varphi \in \mathcal{N}_\lambda^1. \tag{5}$$

Tendo em conta o resultado da Proposição 9-2. facilmente se verifica que

$$|\langle\varphi, \rho_\lambda(z,\cdot)\rangle| \leq C_{q,\varepsilon}|\varphi|_{q,1,\lambda}e^{\varepsilon|z|}\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon|x|}d\lambda(x).$$

O integral no lado direito é finito pela Proposição 1. Isto prova que $\rho_\lambda(z,\cdot) \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$. Vamos agora ver que $\rho_\lambda(z,\cdot)$ tem a seguinte representação

$$\rho_\lambda(z,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}Q_n^\lambda(\cdot). \tag{6}$$

De facto, dado que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{N}_\lambda^1$, então se $\varphi = P_k^\lambda$, $k \in \mathbb{N}_0$, temos $\langle P_k^\lambda, \rho_\lambda(z,\cdot)\rangle = z^k$ usando a definição de $\rho_\lambda(z,\cdot)$ em (5) assim como usando a expressão em (6).

5 Teoremas de caracterização

Nesta secção definimos as transformadas $S_{\mathbb{P}^\lambda}$ e $S_{\mathbb{Q}^\lambda}$, à custa das quais vamos caracterizar os espaços de funções teste $\mathcal{N}_\lambda^\beta$ e das funções generalizadas $\mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$. A transformada $S_{\mathbb{P}^\lambda}$ de $\varphi \in \mathcal{N}_\lambda^\beta$ define-se por

$$(S_{\mathbb{P}^\lambda}\varphi)(z) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+z)d\lambda(x) = \langle\varphi, \rho_\lambda(z;.)\rangle.$$

Por sua vez, se $\Phi \in \mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$, então

$$(S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi)(z) := \langle e_\lambda(z;.), \Phi\rangle.$$

Note que $S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi$ está definido somente numa vizinhança da origem, pois se $\Phi \in \mathcal{H}_{-q,\lambda}^{-\beta}$, então $e_\lambda(z;.) \in \mathcal{H}_{q,\lambda}^\beta$ para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 2^{-q/2}$. Note ainda que se λ é a medida Gausseana (cf. Exemplo 5), então $S_{\mathbb{P}^\lambda}$ e $S_{\mathbb{Q}^\lambda}$ coincidem.

5.1 Caracterização das funções teste

Para cada $l \in \mathbb{N}_0$, denotamos por $\mathcal{E}^k_{2^{-l}}(\mathbb{C})$ o conjunto das funções inteiras de ordem de crescimento $k \in [1, 2]$ e tipo 2^{-l}, i.e.,

$$\mathcal{E}^k_{2^{-l}}(\mathbb{C}) = \{u : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \text{inteira} |\ |u(z)| \leq C \exp(2^{-l}|z|^k),\ C > 0\}.$$

Para qualquer $l \in \mathbb{N}_0$, a aplicação

$$|\cdot|_{l,k} : \mathcal{E}^k_{2^{-l}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R},\ u \mapsto |u|_{l,k} := \sup_{z\in\mathbb{C}}\{|u(z)| \exp(-2^{-l}|z|^k)\},$$

é uma norma em $\mathcal{E}^k_{2^{-l}}(\mathbb{C})$ e $(\mathcal{E}^k_{2^{-l}}(\mathbb{C}), |\cdot|_{l,k})$ é um espaço de Banach. O espaço das funções inteiras de tipo mínimo e ordem de crescimento k é definido por

$$\mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C}) := \bigcap_{l\in\mathbb{N}_0} \mathcal{E}^k_{2^{-l}}(\mathbb{C}).$$

Toda a função inteira u pode representar-se em série de Taylor na forma

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad u_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} u(z)\bigg|_{z=0}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Consideremos em $\mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C})$ a família $(\|\cdot\|_{q,\beta})_{q\in\mathbb{N}_0}$, $\beta \in [0, 1]$, de normas Hilberteanas, definidas por

$$\|u\|^2_{q,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |u_n|^2 < \infty, \quad u \in \mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C}),$$

a qual é equivalente à família de normas $(|\cdot|_{l,k})_{l\in\mathbb{N}_0}$, ver Apêndice B.

Teorema 11 *A transformada $S_{\mathbb{P}^\lambda}$ é um homeomorfismo entre o espaço de funções teste $\mathcal{N}^\beta_\lambda$ e o espaço $\mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C})$ das funções inteiras do tipo mínimo e ordem de crescimento $k = \frac{2}{1+\beta}$.*

Prova. A demonstração deste teorema está bem preparada pela Proposição 17 no Apêndice B. Assim, se $\varphi \in \mathcal{N}^\beta_\lambda$ é da forma $\varphi = \sum_{n=0}^\infty \varphi_n P^\lambda_n$, então

$$(S_{\mathbb{P}^\lambda}\varphi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n$$

de onde decorre que $|S_{\mathbb{P}^\lambda}\varphi|_{l,k} \leq \|S_{\mathbb{P}^\lambda}\varphi\|_{q,\beta} = |\varphi|_{q,\beta,\lambda}$. Isto prova a continuidade da aplicação $S_{\mathbb{P}^\lambda} : \mathcal{N}_\lambda^\beta \to \mathcal{E}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{min}}(\mathbb{C})$ bem como a sua injectividade.

Inversamente, seja $u \in \mathcal{E}^k_{\mathrm{min}}(\mathbb{C})$ da forma $u = \sum_{n=0}^\infty u_n z^n$, então para todo $q \in \mathbb{N}_0$ temos

$$\|u\|^2_{q,\beta} = \sum_{n=0}^\infty (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |u_n|^2 < \infty.$$

Definimos $\varphi_u := \sum_{n=0}^\infty u_n P_n^\lambda$. Temos $|\varphi_u|_{q,\beta,\lambda} = \|u\|_{q,\beta}$, $\forall q \in \mathbb{N}_0$ pelo que $\varphi_u \in \mathcal{N}_\lambda^\beta$. Temos ainda que $S_{\mathbb{P}^\lambda}\varphi_u = u$, e assim $S_{\mathbb{P}^\lambda}$ é sobrejectiva. Para além disso, pela Proposição 23,

$$|S_{\mathbb{P}^\lambda}^{-1} u|_{q,\beta,\lambda} = \|u\|_{q,\beta} \leq C|u|_{l,k}, \quad C > 0,$$

o que prova a continuidade de $S_{\mathbb{P}^\lambda}^{-1}$. ■

5.2 Caracterização de $\mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1[$

Para cada $l \in \mathbb{N}_0$, denotamos por $\mathcal{E}^{k'}_{2^l}(\mathbb{C})$ o conjunto das funções inteiras de ordem de crescimento $k' \in [2, \infty[$ e tipo 2^l, i.e.,

$$\mathcal{E}^{k'}_{2^l}(\mathbb{C}) = \{U : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \text{inteira} |\ |U(z)| \leq C \exp(2^l |z|^{k'}),\ C > 0\}.$$

Para todo o natural l, a aplicação

$$|.|_{l,k'} : \mathcal{E}^{k'}_{2^l}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R},\ U \mapsto |U|_{l,k} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|U(z)| \exp(-2^l\, |z|^{k'})\},$$

é uma norma em $\mathcal{E}^{k'}_{2^l}(\mathbb{C})$ e $(\mathcal{E}^{k'}_{2^l}(\mathbb{C}), |\cdot|_{l,k'})$ é um espaço de Banach. O espaço das funções inteiras de tipo máximo e ordem de crescimento k', é definido por

$$\mathcal{E}^{k'}_{\mathrm{max}}(\mathbb{C}) := \bigcup_{l \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}^{k'}_{2^l}(\mathbb{C}).$$

Tendo em conta o desenvolvimento de Taylor em torno da origem de $u \in \mathcal{E}^{k'}_{\mathrm{max}}(\mathbb{C})$, podemos considerar em $\mathcal{E}^{k'}_{\mathrm{max}}(\mathbb{C})$ a família $(\|\cdot\|_{-q,-\beta})_{q \in \mathbb{N}_0}$, $\beta \in [0, 1[$, de normas Hilberteanas, dada por

$$|U|^2_{-q,-\beta} = \sum_{n=0}^\infty (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} |U_n|^2 < \infty,$$

a qual é equivalente à família de normas $(|\cdot|_{l,k'})_{l \in \mathbb{N}_0}$, ver Apêndice B.

Teorema 12 *A transformada $S_{\mathbb{Q}^\lambda}$ é um homeomorfismo entre o espaço de funções generalizadas $\mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$, $\beta \in [0,1[$ e o espaço $\mathcal{E}_{\max}^{k'}(\mathbb{C})$ das funções inteiras do tipo máximo e ordem de crescimento $k' = \frac{2}{1-\beta}$.*

Prova. A demonstração deste teorema é análoga à do teorema anterior, usando a Proposição 18 no Apêndice B. ■

5.3 Caracterização de $\mathcal{N}_\lambda^{-1}$

Seja $\mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$ o conjunto das funções holomorfas numa vizinhança da origem. Consideremos a família $(|\cdot|_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ de normas em $\mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$, definida do seguinte modo: se $U \in \mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$, então existe $l \in \mathbb{N}_0$, tal que

$$|U|_l := \sup_{|z|\leq 2^{-l}} |U(z)| < \infty.$$

Nestas condições, U admite desenvolvimento de Taylor em $D = \{z \in C |\ |z| \leq 2^{-l}\}$, $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$, $\forall z \in D$, e existe $q \in \mathbb{N}_0$, tal que

$$\|U\|_{-q,-1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq}|U_n|^2 < \infty.$$

Deste modo, introduzimos em $\mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$, uma outra família de normas, $(\|\cdot\|_{-q,-1})_{q\in\mathbb{N}_0}$, equivalente à primeira, ver Proposição 19 no Apêndice B.

Teorema 13 *A transformada $S_{\mathbb{Q}^\lambda}$ é um homeomorfismo entre o espaço de funções generalizadas $\mathcal{N}_\lambda^{-1}$ e o espaço $\mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$.*

Prova. A demonstração deste teorema é semelhante à dos dois teoremas anteriores, usando a Proposição 19 no Apêndice B. ■

6 Cálculo de Wick

Facilmente se vê que o conjunto $\mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$ forma uma álgebra de funções, para as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar. Assim, se $\Phi, \Psi \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$, então $S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi,\ S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Psi \in \mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$ e ainda $S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi \cdot S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Psi \in \mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$. Pelo Teorema 13 existe $\Theta \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$ tal que $S\Theta = S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi \cdot S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Psi$. Denotamos a função generalizada Θ por $\Phi\Diamond\Psi$ à qual chamamos *produto de Wick* de Φ e Ψ. Assim, se

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n Q_n^\lambda, \qquad \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n Q_n^\lambda,$$

então $\Phi\Diamond\Psi$ representa-se por

$$\Phi\Diamond\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n Q_n^\lambda, \quad \Theta_n = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k \Psi_{n-k}.$$

A seguinte proposição diz-nos que o produto de Wick é uma aplicação contínua.

Proposição 14 *O produto de Wick é uma aplicação contínua em $\mathcal{N}_\lambda^{-1}$, e dados $\Phi \in \mathcal{H}_{-q,\lambda}^{-1}$, $\Psi \in \mathcal{H}_{-p,\lambda}^{-1}$, temos a seguinte majoração:*

$$|\Phi\Diamond\Psi|_{-r,-1,\lambda} \leq |\Phi_{-q,-1,\lambda}|\Psi|_{-p,-1,\lambda}, \quad r = p + q + 1.$$

Prova. Podemos majorar do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
|\Phi\Diamond\Psi|_{-r,-1,\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nr}|\Theta_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nr}(n+1)\sum_{k=0}^{n} |\Phi_k|^2|\Psi_{n-k}|^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 2^{-p(n-k)}2^{-qk}|\Phi_k|^2|\Psi_{n-k}|^2 \\
&= |\Phi|_{-q,-1,\lambda}^2|\Psi|_{-p,-1,\lambda}^2,
\end{aligned}$$

onde usamos o facto $\frac{n+1}{2^n} \leq 1$. ■

As potências de Wick $\Phi^{\Diamond n} := \Phi\Diamond\Phi\Diamond\ldots\Diamond\Phi$, $n \in \mathbb{N}_0$ de $\Phi \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$ são definidas por

$$\Phi^{\Diamond n} = S_{\mathbb{Q}^\lambda}^{-1}((S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi)^n).$$

Mais geralmente, se $L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n$ é uma função analílica, então podemos estudar a versão Wick desta função, i.e., $L^\Diamond(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$. Temos o seguinte teorema.

Teorema 15 *Seja L uma função analítica numa vizinhança de $z_0 = \mathbb{E}_\lambda(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$. Então $L^\Diamond(\Phi)$ definida por $L^\Diamond(\Phi) := S_{\mathbb{Q}^\lambda}^{-1}(L(S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi))$ é um elemento em $\mathcal{N}_\lambda^{-1}$.*

Prova. Com vista a aplicar o teorema de caracterização (cf. Teorema 13) basta verificar que $L(S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi)$ é holomorfa em torno da origem. Mas isto resulta facilmente escolhendo uma vizinhança suficientemente pequena em torno da origem de modo que a composição $L \circ S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi$ seja holomorfa. ■

Exemplo 16 *Sejam $\Phi, \Psi \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$ funções generalizadas dadas.*

1. *Então $\exp^\Diamond(\Phi)$ pode escrever-se como*

$$\exp^\Diamond(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Phi^{\Diamond n}.$$

2. *É fácil verificar a seguinte propriedade:*

$$\exp^\Diamond(\Phi) \Diamond \exp^\Diamond(\Psi) = \exp^\Diamond(\Phi + \Psi).$$

3. *Se Φ é tal que $\mathbb{E}_\lambda(\Phi) > 0$, então $\log^\Diamond(\Phi) \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$ a qual é solução da equação*

$$\exp^\Diamond(X) = \Phi.$$

4. *Se Φ é tal que $\mathbb{E}_\lambda(\Phi) \neq 0$, então $\Phi^{\Diamond -1} := S_{\mathbb{Q}^\lambda}^{-1}((S_{\mathbb{Q}^\lambda}\Phi)^{-1}) \in \mathcal{N}_\lambda^{-1}$ e a solução da equação*

$$X \Diamond \Phi = \Psi$$

é $X = \Phi^{\Diamond -1} \Diamond \Psi$.

O produto de Wick generaliza-se, sem dificuldade, aos espaços de funções generalizadas $\mathcal{N}_\lambda^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1[$, bem como aos espaços de funções teste $\mathcal{N}^\beta$, $\beta \in [0, 1]$. O conceito de produto de Wick é frequentemente utilizado em modelos de equações diferenciais estocásticas, sendo as soluções obtidas por intermédio das transformadas $S_{\mathbb{P}^\lambda}$ e $S_{\mathbb{Q}^\lambda}$. Para mais detalhes e generalizações sobre o produto de Wick ver por exemplo [11] (caso Gausseano!) e as suas aplicações em [9].

A Prova da Proposição 1

Prova. 1. $\Rightarrow$ 2. Por um lado, dado que $l_\lambda(\cdot)$ é analítica numa vizinhança V_0 da origem, então temos

$$l_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{d^n}{dz^n} l_\lambda(z) \right]_{z=0}. \tag{7}$$

Por outro lado, de acordo com a definição de $l_\lambda(\cdot)$ (cf. (1)) temos

$$l_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n d\lambda(x), \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Assim, de (7) e (8) resulta que 2. fica provado desde que

$$\left| \frac{d^n}{dz^n} l_\lambda(z)|_{z=0} \right| \leq n! C^n K, \quad C, K > 0.$$

Pela fórmula integral de Cauchy se $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| = \varepsilon > 0\} \subset V_0$, então

$$\left| \frac{d^n}{dz^n} l_\lambda(z)|_{z=0} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|l_\lambda(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq n! \frac{1}{\varepsilon^n} \sup_\gamma |l_\lambda(z)|.$$

Portanto, basta tomar $C = \frac{1}{\varepsilon}$ e $K = \sup_\gamma |l_\lambda(z)|$.
2. $\Rightarrow$ 1. Tendo em atenção (8) basta provar que a série é absolutamente convergente numa vizinhança da origem. Mas não é difícil ver que

$$|l_\lambda(z)| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} (|z|C)^n$$

a qual é finita se e só se $|z| < \frac{1}{C}$. O que prova 1.
2. $\Rightarrow$ 3. Por um lado temos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon|x|} d\lambda(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} x^{2n} d\lambda(x) \right)^{1/2},$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Visto que $(2n)! \leq 2^{2n}(n!)^2$, então usando a hipótese obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon|x|} d\lambda(x) \leq \sqrt{K} \sum_{n=0}^{\infty} (2C\varepsilon)^n$$

a qual é finita desde que ε seja escolhido tal que $2C\varepsilon < 1$.
3. $\Rightarrow$ 2. Por hipótese existe $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon|x|} d\lambda(x) = C_\varepsilon,$$

pelo que, desenvolvendo $e^{\varepsilon|x|}$ em série cada tremo desta série é inferior ou igual a C_ε, ou seja

$$\frac{\varepsilon^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |x|^n d\lambda(x) \leq C_\varepsilon.$$

Assim, 2. resulta da monotonia do integral. ∎

B Normas em $\mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C})$, $\mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C})$ e $\mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$

Proposição 17 *Os dois sistemas de normas* $(|\cdot|_{l,k})_{l\in\mathbb{N}_0}$, $k = \frac{2}{1+\beta}$ *e* $(\|\cdot\|_{q,\beta})_{q\in\mathbb{N}_0}$, $\beta \in [0,1]$ *definidos no espaço* $\mathcal{E}^{\mathrm{k}}_{\min}(\mathbb{C})$ *são equivalentes.*

Prova. Sejam $l \in \mathbb{N}_0$ e $u \in \mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C})$, arbitrários, com vista a mostrar que existem $C > 0$ e $q \in \mathbb{N}_0$, tais que $|u|_{l,k} \leq C\|u\|_{q,\beta}$. Como $u \in \mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C})$, tem-se que $\|u\|^2_{q,\beta} < \infty$, $\forall q \in \mathbb{N}_0$. Para além disso, verifica-se também que $|u|_{l,k} < \infty$, $\forall l \in \mathbb{N}_0$, pois $\mathcal{E}^k_{2^{-l}}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C})$, $\forall l \in \mathbb{N}_0$. Como u é inteira, admite desenvolvimento de Taylor em torno da origem, $u(z) = \sum_{n=0}^\infty u_n z^n$. Assim, $\forall q \in \mathbb{N}_0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, temos, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |u(z)| &\leq \sum_{n=0}^\infty |u_n||z|^n \leq \sqrt{\sum_{n=0}^\infty (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^\infty (n!)^{-1-\beta} 2^{-nq} |z|^{2n}} \\ &= \|u\|_{q,\beta} \sqrt{\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{(2^{-kq/2}|z|^k)^n}{n!} \right)^{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Usando a seguinte desigualdade

$$\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x^n}{n!}\right)^\alpha \leq \exp(\alpha x), \quad \alpha \geq 1, \quad x \geq 0$$

a qual prova-se utilizando a desigualdade de Hölder com $1 < \alpha < 2$ e $\left(\frac{x^n}{n!}\right)^\alpha = \left(\frac{x^n}{n!}\right)^{2-\alpha} \left(\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2\right)^{\alpha-1}$, então obtemos

$$|u(z)| \leq \|u\|_{q,\beta} \exp(2^{-kq/2}|z|^k).$$

Assim, $\forall q \in \mathbb{N}_0$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\{|u(z)|\exp(-2^{-kq/2}|z|^k)\} \leq \|u\|_{q,\beta}\,.$$

Então, basta escolher q tal que $l \leq \frac{q}{1+\beta}$ para obter $|u|_{l,k} \leq \|u\|_{q,\beta}$.

Inversamente, sejam $q \in \mathbb{N}_0$ e $u \in \mathcal{E}^k_{\min}(\mathbb{C})$, arbitrários, para mostrarmos que existem $K > 0$ e $l \in \mathbb{N}_0$, tais que $\|u\|_{q,\beta} \leq K|u|_{l,k}$. Note-se que, $\forall l \in \mathbb{N}_0$, temos que $|u(z)| \leq |u|_{l,k}\exp(2^{-l}|z|^k)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Assim, verifica-se que

$$|u_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=\rho>0}\frac{|u(z)|}{|z|^{n+1}}|dz| \leq |u|_{l,k}\frac{e^{2^{-l}\rho^k}}{\rho^n}, \quad \rho > 0.$$

Esta majoração pode ser optimizada tomando $\rho = (n2^lk^{-1})^{k^{-1}}$. Substituindo, obtemos

$$|u_n| \leq |u|_{l,k}(e^nn^{-n})^{k^{-1}}(k^n2^{-nl})^{k^{-1}}.$$

Finalmente tendo em conta a Fórmula de Stirling,

$$e^nn^{-n} \leq \frac{1}{n!}e\sqrt{2\pi}(n+1)$$

obtemos

$$|u_n| \leq |u|_{l,k}\left(\frac{e\sqrt{2\pi}(n+1)}{n!}\right)^{k^{-1}}\left(k^n2^{-nl}\right)^{k^{-1}}.$$

Assim, a norma $\|u\|^2_{q,\beta}$ é dada por

$$\|u\|^2_{q,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{nq}|u_n|^2 \leq |u|^2_{l,k}(e\sqrt{2\pi})^{1+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2(2^q(k2^{-l})^{1+\beta})^n. \tag{9}$$

Dado $q \in \mathbb{N}_0$, basta tomar $l \in \mathbb{N}_0$, tal que $2^q(k2^{-l})^{1+\beta} < 1$ e usar a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = (1-x)^{-3}, \quad |x| < 1,$$

de modo que a série em (9) é finita. A desigualdade (9) também prova que as normas que constituem a família $(\|\cdot\|_{q,\beta})_{q\in\mathbb{N}_0}$ estão bem definidas. ∎

Proposição 18 *Os dois sistemas de normas* $(|\cdot|_{l,k'})_{l\in\mathbb{N}_0}$, $k' = \frac{2}{1-\beta}$ *e* $(\|\cdot\|_{-q,-\beta})_{q\in\mathbb{N}_0}$, $\beta \in [0,1[$, *definidos no espaço* $\mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C})$ *são equivalentes.*

Prova. Seguindo um processo análogo ao da prova anterior, tomando $q \in \mathbb{N}_0$ e $U \in \mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C})$, arbitrários, mostramos que existem um natural l, tal que $2^l \geq (k')^{-1} 2^{(q+\beta)/(1-\beta)}$ e um número positivo $C = 2^{\beta/2}$ tais que $|u|_{l,k'} \leq C \|U\|_{-q,-\beta}$. Inversamente, e também de forma análoga ao da proposição anterior, dados $l \in \mathbb{N}_0$ e $U \in \mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C})$ tais que $|U|_{l,k'} < \infty$, provamos que existem um natural q em que $2^{-q}(\frac{2^{l+1}}{1-\beta})^{1-\beta} < 1$ e um número positivo $K = (e\sqrt{2\pi})^{(1-\beta)/2}(1 - 2^{-q}(\frac{2^{l+1}}{1-\beta})^{\beta-1})$, tais que $\|U\|_{-q,-\beta} \leq K|U|_{l,k'}$. ■

Proposição 19 *Os dois sistemas de normas* $(|\cdot|_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ *e* $(\|\cdot\|_{-q,-1})_{q\in\mathbb{N}_0}$, *introduzidas em* $\mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$ *são equivalentes.*

Prova. Neste caso, temos também uma demonstração que segue um processo análogo às duas anteriores. Tomando $q \in \mathbb{N}_0$ e $U \in \mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$, de modo que $\|U\|_{-q,-1} < \infty$, mostramos que existem $C = (1 - 2^q |z|^2)^{-2^{-1}} > 0$ e $l \in \mathbb{N}_0$ $(l > \frac{q}{2})$, tais que $|U|_l \leq C \|U\|_{-q,-1}$. Por sua vez, dados $l \in \mathbb{N}_0$ e $U \in \mathrm{Hol}_0(\mathbb{C})$, com $|U|_l < \infty$, obtemos $q \in \mathbb{N}_0$ $(q > 2l)$, e $K = \left(1 - 2^{-q+2l}\right)^{-2^{-1}} > 0$, tais que $\|U\|_{-q,-1} \leq K|U|_l$. ■

Referências

[1] S. Albeverio, Y. Daletzky, Yu. G. Kondratiev, and L. Streit. Non-Gaussian infinite dimensional analysis. *J. Funct. Anal.*, 138:311–350, 1996.

[2] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, and L. Streit. How to generalize white noise analysis to non-Gaussian spaces. In Ph. Blanchard, M. Collin-Sirugue, L. Streit, and D. Testard, editors, *Dynamics of Complex Systems and Irregular Systems*, pages 120–130, Singapore, 1993. World Scientific.

[3] M. P. Appell. Sur une classe de polynomes. *Annales d'École Normal Superieur*, 9:119–144, 1882.

[4] Y. M. Berezansky, Z. G. Sheftel, and G. F. Us. *Functional Analysis*, volume 2. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

[5] Yu. M. Berezansky and Yu. G. Kondratiev. *Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis*, volume 1. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[6] Yu. M. Berezansky, V. O. Livinsky, and E. W. Lytvynov. A generalization of Gaussian white noise analysis. *Methods Funct. Anal. Topology*, 1(1):28–55, 1995.

[7] I. Gradstein and I. Ryshik. *Tables of Series, Products and Integrals*, volume 1. Verlag Harri Deutsch Thun, Frankfurt/M, 1981.

[8] T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff, and L. Streit. *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[9] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, and T. Zhang. *Stochastic Partial Differential Equations: a modeling, white noise functional approach*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

[10] N. A. Kachanovsky and S. V. Koshkin. Minimality of Appell-like systems and embeddings of test function spaces in a generalization of white noise analysis. *Methods Funct. Anal. Topology*, 5(3):13–25, 1999.

[11] Yu. G. Kondratiev, P. Leukert, and L. Streit. Wick calculus in Gaussian analysis. *Acta Appl. Math.*, 44:269–294, 1996.

[12] Yu. G. Kondratiev, J. L. Silva, and L. Streit. Generalized Appell systems. *Methods Funct. Anal. Topology*, 3(3):28–61, 1997.

[13] Yu. G. Kondratiev, L. Streit, W. Westerkamp, and J.-A. Yan. Generalized functions in infinite dimensional analysis. *Hiroshima Math. J.*, 28(2):213–260, 1998.

[14] H.-H. Kuo. A quarter century of white noise theory. In T. Hida and K. Saitô, editors, *Quantum Information IV*, volume 373. World Scientific, 2002.

[15] H. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1971.