Operadores de criação e aniquilação no espaço de Fock

Andreia Nunes, Filipa Rodrigues e José Luis Silva
Universidade da Madeira
9000-390 Funchal
Portugal

Resumo

Nesta nota abordamos de uma forma geral os operadores de criação e aniquilação no espaço de Fock. A ênfase reside no facto de introduzirmos a norma no espaço de Fock dependendo de uma sucessão, cobrindo desta forma as diferentes normalizações que aparecem na literatura. São analisados o caso Gausseano, Poissoniano e o caso das medidas Gamma.

1 Introduçaõ e motivação

Neste trabalho abordamos os operadores de criação e aniquilação no espaço de Fock. É bem conhecido que o espaço de Fock está estritamente relacionado com espaços $L^2(\mu)$, onde μ é uma medida sobre um espaço linear. No caso da medida Gausseana trata-se, pois, do isomorfismo de Segal, ver Exemplo 3. A medida Gausseana não é a única a possuir esta propriedade, por exemplo a medida de Poisson ([5]) e a medida Gamma (ver [3]) possuem também uma decomposição ortogonal nos polinómios de Charlier e de Laguerre, respectivamente. No último caso é interessante analisar a bibliografia e verificar que não existe uma definição única dos polinómios de Laguerre, ver por exemplo [6], e como consequência o isomorfismo com o espaço de Fock vem alterado dependendo da definição adoptada. No caso em dimensão infinita ver por exemplo [8] para os detalhes.

Assim, este trabalho tem por objectivo abordar de uma forma geral a normalização no espaço de Fock assim como as respectivas modificações ocorridas nos operadores de criação e aniquilação. É provado que estes dois operadores verificam a relação de comutação canónica e que a sua norma é independente da normalização. Como exemplo tratamos o caso do operador de posição e operador de momento.

2 Preliminares

2.1 Produto tensorial de espaços de Hilbert

O produto tensorial de espaços de Hilbert dá uma descrição abstracta da construção de espaços de funções em múltiplas variáveis em termos de espaços de funções de uma variável.

Nesta subsecção vamos recordar resumidamente a sua construção assim como o produto tensorial simétrico. Para mais pormenores sobre produto tensorial de espaços de Hilbert e suas aplicações ver [1], [2, Vol. II], [4], [7, Vol. I]. Seguidamente definimos o espaço de Fock simétrico associado a um espaço de Hilbert, o qual, será o objecto principal nas nossas considerações no resto deste trabalho.

Seja $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_k)_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de espaços de Hilbert separáveis e $(e_\alpha^k)_{\alpha=1}^\infty$ uma base de $\mathcal{H}_k$, $k = 1, ..., n$. Consideremos os elementos

$$e_\alpha := e_{\alpha_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n}^n, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

e denotamos por $\mathcal{E}^n$ o espaço das combinações lineares finitas dos elementos e_α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Assim um elemento $f \in \mathcal{E}^n$ tem a seguinte representação

$$f = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_n=1}^N f^{(\alpha)} e_{\alpha_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n}^n,\ f^{(\alpha)} \in \mathbb{C}.$$

Definimos a seguinte aplicação em $\mathcal{E}^n$

$$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{E}^n} : \mathcal{E}^n \times \mathcal{E}^n \longrightarrow \mathbb{C}\,(e_\alpha, e_\beta) \mapsto (e_\alpha, e_\beta)_{\mathcal{E}^n} := (e_{\alpha_1}^1, e_{\beta_1}^1)_1 ... (e_{\alpha_n}^n, e_{\beta_n}^n)_n. \quad (1)$$

Dado que $(\cdot,\cdot)_i$, $i = 1, ..., n$ é um produto interno, então não é difícil de provar que $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{E}^n}$ também o é. Temos ainda que os elementos e_α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ são ortogonais em $\mathcal{E}^n$; de facto isto é simplesmente uma consequência da definição do produto interno em $\mathcal{E}^n$. Note que $(e_\alpha, e_\beta)_{\mathcal{E}^n} = \delta_{\alpha\beta} := \delta_{\alpha_1\beta_1} ... \delta_{\alpha_n\beta_n}$. O produto interno para dois elementos arbitrários em $\mathcal{E}^n$ faz-se por linearidade. Como resultado obtemos, dados dois elementos quaisquer $f, g \in \mathcal{E}^n$ da forma

$$f = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_n=1}^{N} f^{(\alpha)} e_\alpha, \qquad g = \sum_{\beta_1,...,\beta_n=1}^{M} g^{(\beta)} e_\beta,$$

o produto interno $(f, g)_{\mathcal{E}^n}$ é dado por

$$(f, g)_{\mathcal{E}^n} = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_n=1}^{\min(N,M)} f^{(\alpha)} \overline{g^{(\alpha)}}.$$

Definição 1 *Chamamos* ***produto tensorial*** *de $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_n$ e representamos por $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ ao completado de $\mathcal{E}^n$ relativamente a $|\cdot|_{\mathcal{E}^n}$. O produto interno (resp. norma) em $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ será denotado por $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_n}$ (resp. $|\cdot|_{\mathcal{H}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_n}$) ou simplesmente por $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$ se não houver perigo de confusão.*

Assim, um elemento $f \in \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ admite a seguinte representação

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f^{(\alpha)} e^1_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e^n_{\alpha_n}, \; f^{(\alpha)} \in \mathbb{C},$$

com norma dada por

$$|f|^2_{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |f^{(\alpha)}|^2 < \infty.$$

No caso em que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = ... = \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ então o produto tensorial de $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_n$ será denotado por $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Mais importante em aplicações, ver Secção 3 e seguintes, é o produto tensorial simétrico de espaços de Hilbert, i.e., o subespaço de todos os elementos em $\mathcal{H}^{\otimes n}$ invariante para qualquer permutação dos índices. Mais precisamente, seja S_n o grupo das permutações dos números {1,...,n}. Consideremos os elementos $e_{\alpha_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} e_{\alpha_n} \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ da forma

$$e_{\alpha_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} e_{\alpha_n} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{\alpha_{\sigma_1}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{\sigma_n}}. \tag{2}$$

Definição 2 *O espaço de todos os elementos da forma (2) é denotado por $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ e chama-se produto tensorial simétrico.*

Na literatura não existe uma uniformidade no que respeita à introdução de um produto interno em $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$, por exemplo, na teoria das probabilidades é muito frequente usar-se o seguinte produto interno

$$(e_{\alpha_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}e_{\alpha_n}, e_{\beta_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}e_{\beta_n})_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} = n!(e_{\alpha_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}e_{\alpha_n}, e_{\beta_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}e_{\beta_n})_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

Noutras áreas da matemática encontramos o produto interno em $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ dado à custa do produto interno em $\mathcal{H}^{\otimes n}$ sem o factor $n!$. Esta última escolha é razoável no sentido em que estamos a lidar simplesmente com um subespaço de $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Neste trabalho, porém, vamos englobar todas as situações possíveis. Mais precisamente, consideremos $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão em $\mathbb{R}_+$ e definimos $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}$ por

$$(f,g)_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} := d_n(f,g)_{\mathcal{H}^{\otimes n}}, \qquad f,g \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}.$$

Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\infty}$, i.e., $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k, 0, ...)$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$, podemos formar o seguinte elemento

$$e_\alpha = e_1^{\otimes \alpha_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}e_k^{\otimes \alpha_k} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}.$$

Não é difícil de verificar que a norma de e_α no espaço $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ é dado por

$$|e_\alpha|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} = \frac{1}{n!} d_n \alpha_1!...\alpha_k!$$

pelo que, o conjunto

$$\{e_\alpha^{(n)},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{\infty},\ \alpha_1 + ... + \alpha_n = n\}, \tag{3}$$

onde

$$e_\alpha^{(n)} := \sqrt{\frac{n!}{d_n \alpha_1!...\alpha_k!}} e_\alpha,$$

forma uma base de $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$.

2.2 O espaço de Fock

Nesta subsecção vamos introduzir o espaço de Fock sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Em baixo daremos somente a definição do espaço de Fock Bosónico, embora esta não seja a única definição possível. Para mais informação detalhada sobre este assunto convidamos o leitor interessado a ver a bibliografia citada no início desta secção.

Antes de procedermos à definição do espaço de Fock no caso geral, vamos considerar o caso simples em que $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

Exemplo 3 *Seja μ a medida Gausseana no espaço de Hilbert a uma dimensão $\mathbb{R}$. Isto é,*

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim podemos considerar o espaço $L^2(\mu)$ das funções complexas de quadrado integrável relativamente à medida μ, i.e.,

$$L^2(\mu) = \left\{ f : \mathbb{R} \to C \mid |f|^2_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

O espaço $L^2(\mu)$ possui uma base ortonormada formada pelos polinómios de Hermite. Mais precisamente, definindo $e_\mu(z, \cdot)$; $z \in \mathbb{C}$ por

$$e_\mu(z; x) := e^{zx - \frac{1}{2}z^2}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

que é uma função inteira na variável z; podemos fazer o desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem, obtendo-se

$$e_\mu(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x).$$

Não é difícil de ver que $H_n(x)$ são polinómios de ordem n, chamados polinómios de Hermite.Temos ainda que

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) d\mu(x) = n! \delta_{nm},$$

assim, os polinómios de Hermite normalizados h_n,

$$h_n(x) := (n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(x), \;\; n \in \mathbb{N}_0,$$

formam uma base de $L^2(\mu)$. Note que as potências x^m podem ser escritas à custa dos polinómios H_n pelas fórmulas

$$x^{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{m} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{(2n)!(m-n)!} H_{2n}(x\sqrt{2})$$

e

$$x^{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}} \sum_{n=0}^{m} \frac{(\sqrt{2})^{2m+1}}{(2n+1)!(m-n)!} H_{2n+1}(x\sqrt{2})$$

consequentemente, cada $f \in L^2(\mu)$ admite a seguinte decomposição (série de Fourier-Hermite) em termos da base h_n :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} h_n(x), \qquad f^{(n)} = (f, h_n)_{L^2(\mu)}. \tag{4}$$

Esta decomposição permite obter o seguinte isomorfismo entre $L^2(\mu)$ e $l^2(\mathbb{C})$ dado por

$$L^2(\mu) \ni f \leftrightarrow \vec{f} = (f^{(0)}, f^{(1)}, ..., f^{(n)}, ...) \in l^2(\mathbb{C}) \tag{5}$$

A generalização da decomposição (4) para o caso em dimensão infinita, i.e., quando $\mathbb{R}$ é substituido por um espaço adequado de dimensão infinita (tipicamente um espaço nuclear $\mathcal{N}$ e o seu dual $\mathcal{N}'$) o análogo do isomorfismo (5) faz-se com o espaço de Fock em vez de $l^2(\mathbb{C})$.

Agora procedemos na definição do espaço de Fock.

Definição 4 *Seja $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ um espaço de Hilbert complexo separável. Chamamos **espaço de Fock (ou espaço de Fock Bosónico** sobre $\mathcal{H}$) e denotamos por $\Gamma(\mathcal{H})$ ao espaço*

$$\Gamma(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}, \qquad \mathcal{H}^{\hat{\otimes} 0} := \mathbb{C}.$$

O produto interno em $\Gamma(\mathcal{H})$ é dado por

$$(F, G)_{\Gamma(\mathcal{H})} = \sum_{n=0}^{\infty} (F^{(n)}, G^{(n)})_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (F^{(n)}, G^{(n)})_{\mathcal{H}^{\otimes n}},$$

onde $F = (F^{(n)})_{n=0}^{\infty}, \ G = (G^{(n)})_{n=0}^{\infty}$.

A norma correspondente a $(\cdot, \cdot)_{\Gamma(\mathcal{H})}$ é obviamente dado por

$$|F|^2_{\Gamma(\mathcal{H})} = \sum_{n=0}^{\infty} |F|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n |F|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

Nas próximas secções vamos introduzir os operadores de criação e aniquilação no espaço $\Gamma(\mathcal{H})$. Para tal é necessário introduzir um subconjunto denso em $\Gamma(\mathcal{H})$. Passamos, pois, à sua descrição.

Consideremos o subconjunto $\Gamma'(\mathcal{H})$ constituido pelos elementos da forma

$$F = (F^{(0)}, F^{(1)}, ..., F^{(n)}, 0, 0, ...).$$

Assim, $\Gamma'(\mathcal{H})$ é constituido pelos elementos de $\Gamma(\mathcal{H})$ com um número finito de entradas não nulas. Este espaço também é conhecido como o conjunto dos vectores de um número finito de partículas, conforme [7, Vol. I]. É óbvio que $\Gamma'(\mathcal{H})$ é denso em $\Gamma(\mathcal{H})$, pois se $F = (F^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(\mathcal{H})$, então a sucessão $(F_n)_{n=0}^{\infty} \subset \Gamma'(\mathcal{H})$, onde para cada $n \in \mathbb{N}_0$

$$F_n := (F^{(0)}, F^{(1)}, ..., F^{(n)}, 0, 0, ...),$$

converge para F em $\Gamma(\mathcal{H})$. De facto

$$|F - F_n|^2_{\Gamma(\mathcal{H})} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|F^{(k)}\right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} k}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Atendendo ao facto de que o lado direito da igualdade em cima ser o resto de uma série absolutamente convergente. Isto prova que, na realidade, F é limite de uma sucessão de elementos em $\Gamma'(\mathcal{H})$. Pelo que $\Gamma'(\mathcal{H})$ é denso em $\Gamma(\mathcal{H})$.

Dado que o espaço de Fock é uma soma ortogonal dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ e visto que os elementos e_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^\infty$ (cf. (3)) constituem uma base de $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$, então o sistema

$$\{\gamma^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0\},$$

onde

$$\gamma^{(n)} := (0, ..., 0, e_\alpha^{(n)}, 0, 0, ...), \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^\infty,$$

com $e_\alpha^{(n)}$ na (n+1)-posição, forma uma base ortonormada de $\Gamma(\mathcal{H})$. Na próxima secção faremos uso desta base.

3 Operador de criação. Definição e propriedades

Definição 5 *Seja $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ um espaço de Hilbert e $h \in \mathcal{H}$ um elemento fixo. O operador de criação $a^+(h)$ é definido por*

$$a^+(h)|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} : \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n} \to \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}, \quad f^{(n)} \mapsto c_n h \hat{\otimes} f^{(n)}, \quad c_n = \sqrt{\frac{(n+1)d_n}{d_{n+1}}}.$$

A dedução da forma do coeficiente c_n tem em conta a forma do operador de aniquilação (ver Secção 4) assim como a relação de comutação canónica (ver Secção 5). Por este facto deixamos a sua dedução para a Secção 5.

Proposição 6 *O operador $a^+(h)$ está bem definido como um operador linear limitado com norma dada por*

$$|| \, a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} || = \sqrt{n+1} |h|.$$

Prova Obviamente, $a^+ \, (h)$ é um operador linear e está bem definido, pois, $c_n h \hat{\otimes} f^{(n)} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}$. No caso particular $f^{(n)} = f^{\otimes n} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$, temos

$$\left| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} (f^{\otimes n}) \right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}} = d_{n+1} c_n^2 \left| h \hat{\otimes} f^{(n)} \right|^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} .$$

Não é difícil de verificar, usando a definição de $\hat{\otimes}$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\left| h \hat{\otimes} f^{(n)} \right|^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} \leq \mid h \mid^2 \left| f^{\otimes n} \right|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = \frac{1}{d_n} \mid h \mid^2 \left| f^{\otimes n} \right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} ,$$

pelo que

$$\left| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} (f^{\otimes n}) \right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}} \leq c_n^2 \frac{d_{n+1}}{d_n} \mid h \mid^2 \left| f^{\otimes n} \right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} .$$

Assim, atendendo à forma de c_n, temos

$$\left\| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} \right\| \leq \sqrt{n+1} \mid h \mid . \tag{6}$$

Para provar a desigualdade contrária, basta fazer $f = h$ nas considerações anteriores e ter em atenção que $\forall f \in \mathcal{H}$,

$$\left| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} (f^{\otimes n}) \right| \leq \left\| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} \right\| \left| f^{\otimes n} \right|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} .$$

Como

$$\left| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} (h^{\otimes n}) \right|^2 = (n+1) \mid h \mid^2 \left| h^{\otimes n} \right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} ,$$

concluimos que

$$\left\| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} \right\| \geq \sqrt{n+1} \mid h \mid . \tag{7}$$

Finalmente de (6) e (7) segue o resultado da proposição. ■

Execício 7 *Mostre que $\left| a^+ \, (h) \, |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} \, (f) \right|^2 \leq (n+1) \mid h \mid^2 |f|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}$ com f dada da seguinte forma*

1. $f = e_\alpha = e_1^{\alpha_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} e_k^{\alpha_k}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^\infty$, *com* $\alpha_1 + ... + \alpha_k = n$.
2. $f = f_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} f_n$, $f_i \in \mathcal{H}$, $f_i \perp f_j, i \neq j$.
3. $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^\infty} f^{(\alpha)} e_\alpha \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$.

O operador $a^+(h)$ pode ser definido sobre o espaço $\Gamma'(\mathcal{H})$ componente a componente do seguinte modo: $\forall F \in \Gamma'(\mathcal{H})$ da forma

$$F = (F^{(0)}, F^{(1)}, ..., F^{(n)}, 0, 0, ...),$$

definimos

$$a^+(h)(F) := (a^+(h)|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} 0}}(F^{(0)}), a^+(h)|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} 1}}(F^{(1)}), ..., a^+(h)|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}(F^{(n)}), 0, 0, ...). \tag{8}$$

Dado que $\Gamma'(\mathcal{H})$ é denso em $\Gamma(\mathcal{H})$, resulta que $a^+(h)$ está definido sobre $\Gamma(\mathcal{H})$ com domínio

$$D\left(a^+(h)\right) := \Gamma'(\mathcal{H}).$$

Vamos ver que o operador $a^+(h)$ sobre $\Gamma(\mathcal{H})$ com domínio $\Gamma'(\mathcal{H})$ não é um operador limitado. De facto tomando $F = (\gamma^{(n)})_{n=0}^\infty \in \Gamma(\mathcal{H})$ temos

$$\begin{aligned} \left|a^+(h)(F)\right|_{\Gamma(\mathcal{H})}^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \left|a^+(h)\left(\gamma^{(k)}\right)\right|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(k+1)}}^2 \qquad (9) \\ &\leq |h|^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n (k+1) = \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $a^+(h)$ não é um operador limitado sobre $\Gamma(\mathcal{H})$.

4 Operador de aniquilação. Definição e propriedades

O operador de aniquilação será definido à custa do operador de criação, mais precisamente, o seu adjunto, e será definido em cada subespaço $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ do espaço $\Gamma(\mathcal{H})$, passando-se depois à sua definição sobre o espaço $\Gamma'(\mathcal{H})$.

Definição 8 *O operador de aniquilação $a^{-}(h)$, $h \in \mathcal{H}$ é definido como*

$$a^{-}(h) := \left(a^{+}(h)\right)^{*}|_{\Gamma'(\mathcal{H})},$$

de modo que $a^{-}(h) : \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)} \to \mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}$ com $a^{-}(h)(z) := 0$, $z \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}0} := \mathbb{C}$.

No caso particular $g_1 = g_2 = ... = g_{n+1} = g \in \mathcal{H}$, $g^{\otimes(n+1)} \in \mathcal{H}^{\otimes(n+1)}$ temos

$$(a^{+}(h)\left(f^{\otimes n}\right), g^{\otimes(n+1)})_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}} := (f^{\otimes n}, a^{-}(h)(g^{\otimes(n+1)}))_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}}.$$

Por outro lado

$$(a^{+}(h)\left(f^{\otimes n}\right), g^{\otimes(n+1)})_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}} = \left(f^{\otimes n}, \frac{c_n d_{n+1}}{d_n}(g,h)g^{\otimes n}\right)_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}},$$

logo

$$a^{-}(h)(g^{\otimes(n-1)}) = \frac{c_n d_{n+1}}{d_n}(g,h)g^{\otimes n}. \tag{10}$$

Execício 9 *Calcule as outras expressões para o operador $a^{-}(h)$ no caso*

1. $f_1\hat{\otimes}...\hat{\otimes}f_{n+1} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}$, $f_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, ..., n+1$.
2. $e_\alpha = e_1^{\otimes\alpha_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}e_k^{\otimes\alpha_k} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^\infty$.
3. $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^\infty} f^{(\alpha)}e_\alpha \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}$.

Proposição 10 *O operador $a^{-}(h)$ está bem definido como um operador linear limitado com norma dada por*

$$\left\|a^{-}(h)|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}}\right\| = \sqrt{n}\,|h|.$$

Prova O esquema da prova segue as mesmas linhas da prova da Proposição 6. Seja $f^{(n)} = f^{\otimes n} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}$. Temos por (10)

$$\left|a^{-}(h)\left(f^{\otimes n}\right)\right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n-1)}} \leq \frac{c_{n-1}^2 d_n}{d_{n-1}}|h|^2\left|f^{\otimes n}\right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}},$$

logo

$$\left|a^{-}(h)\left(f^{\otimes n}\right)\right|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n-1)}} \leq \sqrt{n}\,|h|\left|f^{\otimes n}\right|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}}.$$

Fazendo $f = h$ vemos que $|a^{-}(h)(f^{\otimes n})|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n-1)}} \geq \sqrt{n}\,|h|\,|f^{\otimes n}|_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}}$, o que implica o resultado. ■

Execício 11 *Mostre que* $|a^{-}(h)\ |_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}\ (f)|^2 \leq \sqrt{n}\,|h|^2\,|f|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}$ *com* f *da forma:*

1. $f = f_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} f_{n+1} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}$, $f_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, ..., n+1$.
2. $f = e_\alpha = e_1^{\otimes \alpha_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} e_k^{\otimes \alpha_k} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^\infty$.
3. $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^\infty} f^{(\alpha)} e_\alpha \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}(n+1)}$.

O operador de aniquilação define-se sobre o espaço $\Gamma(\mathcal{H})$ com domínio $D(a^{-}(h)) := \Gamma'(\mathcal{H})$, do mesmo modo que (8) como um operador não limitado. Para provar este facto podemos usar um argumento análogo ao operador de criação. Deste modo

$$\begin{aligned} \left|a^{-}(h)(F)\right|^2_{\Gamma(\mathcal{H})} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left|a^{-}(h)(\gamma^{(k)})\right|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes}(k-1)}} \\ &\leq |h|^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k = \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $a^{-}(h)$ não é um operador limitado sobre $\Gamma(\mathcal{H})$.

5 Relação de comutação canónica

Proposição 12 *O par* $(a^{+}(h), a^{-}(g))$, $h, g \in \mathcal{H}$ *verifica a relação de comutação canónica (RCC), se e só se*

1. *São lineares*

   $$a^{\#}(\lambda_1 h + \lambda_2 g) = \lambda_1 a^{\#}(h) + \lambda_2 a^{\#}(g),$$

   onde $a^{\#}(\cdot)$ *representa* $a^{+}(\cdot)$ *ou* $a^{-}(\cdot)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(a^{+}(h))^* = a^{-}(h)$.
3. *Para quaisquer* $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, *temos*

   $$\left[a^{+}(h_1), a^{+}(h_2)\right] = \left[a^{-}(h_1), a^{-}(h_2)\right] = 0,$$

   onde $[A, B] := AB - BA$ *é chamado o* ***comutador*** *dos operadores* A *e* B.
4. $[a^{-}(h_1), a^{+}(h_2)] = (h_2, h_1)\, I$, *onde a igualdade tem lugar em* $\Gamma'(\mathcal{H})$.

5. *O par $(a^{+}(h), a^{-}(g))$ constitui uma representação de Fock se e só se existe um vector unitário $\Omega \in \mathcal{H}$ (chamado* ***vácuo****, no nosso caso $\Omega = 1$) tal que $a^{-}(h)\Omega = 0$, $\forall h \in \mathcal{H}$ e o domínio $\Gamma'(\mathcal{H})$ dos operadores $a^{+}(h)$ e $a^{-}(h)$ é gerado pelos vectores*

$$a^{+}(f_1)\, a^{+}(f_2) \ldots a^{+}(f_n)\, \Omega, \qquad f_i \in \mathcal{H}, i = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Prova Somente 4 carece ser verificado, os restantes são óbvios. Como $\{f^{\otimes n}, f \in \mathcal{H}\}$ forma um conjunto denso em $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$, então basta provar para este tipo de vectores.

$$\begin{aligned}
a^{-}(h_1)\, a^{+}(h_2)\,(f^{\otimes n}) &= a^{-}(h_1)\,(c_n h_2 \hat{\otimes} f^{\otimes n}) \\
&= \frac{d_{n+1} c_n^2}{(n+1)\, d_n} \left[(h_2, h_1)\, f^{\otimes n} + n\,(f, h_1)\, h_2 \hat{\otimes} f^{\otimes (n-1)}\right].
\end{aligned}$$

Trocando os operadores a^{-} e a^{+}, temos

$$\begin{aligned}
a^{+}(h_2)\, a^{-}(h_1)\left(f^{\otimes n}\right) &= a^{+}(h_2)\left(\frac{c_{n-1} d_n}{d_{n-1}}\,(f, h_1)\, f^{\otimes (n-1)}\right) \\
&= \frac{c_{n-1} d_n}{d_{n-1}}\,(f, h_1)\,(c_n h_2 \hat{\otimes} f^{\otimes (n-1)}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left[a^{-}(h_1), a^{+}(h_2)\right]\left(f^{\otimes n}\right) = (h_2, h_1)\, f^{\otimes n} = (h_2, h_1)\, I\left(f^{\otimes n}\right),$$

i.e.,

$$\left[a^{-}(h_1), a^{+}(h_2)\right] = (h_2, h_1)\, I.$$

Estamos prontos para deduzir a constante C_n utilizada nas Secções 2, 3 e 4. Seja $f^{\otimes n} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$, então

$$\begin{aligned}
& [a^{-}(h_1), a^{+}(h_2)](f^{\otimes n}) \\
= \; & a^{-}(h_1) a^{+}(h_2)(f^{\otimes n}) - a^{+}(h_2) a^{-}(h_1)(f^{\otimes n}) \\
= \; & \frac{d_{n+1} c_n^2}{(n+1) d_n}(h_2, h_1) f^{\otimes n} + \left[\frac{d_{n+1} c_n^2 n}{(n+1) d_n} - \frac{c_{n-1} d_n c_n}{d_{n-1}}\right](f, h_1) h_2 \hat{\otimes} f^{\otimes (n-1)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$[a^{-}(h_1), a^{+}(h_2)](f^{\otimes n}) = (h_2, h_1) f^{\otimes n} = (h_2, h_1) I_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}(f^{\otimes n}),$$

então

$$[a^-(h_1), a^+(h_2)] = (h_2, h_1) I_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}.$$

Assim, obtemos

$$\frac{d_{n+1}c_n^2}{(n+1)d_n} = 1 \Longleftrightarrow c_n = \sqrt{\frac{(n+1)d_n}{d_{n+1}}}.$$

6 Exemplos e aplicações

Exemplo 13 *Consideremos os operadores P e Q definidos em $L^2(\mathbb{R}, dx)$ por*

$$\begin{array}{rcll} P & : & D(P) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, dx), & (P\psi)(q) := -i\psi'(q), \\ Q & : & D(Q) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, dx), & (Q\psi)(q) := q\psi(q). \end{array}$$

Definimos os operadores de criação e aniquilação por

$$a^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP), \qquad a^- := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP).$$

Temos que $[a^-, a^+] = I$, sendo I a identidade em $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Os opera dores Q e P são chamados **operador de posição** e **operador de momento.**
Resolução Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ temos:

$$\left[a^-, a^+\right](\psi) := a^- \underbrace{a^+(\psi)}_{(1)} - a^+ \underbrace{a^-(\psi)}_{(2)}$$

Assim

$$(1) \quad a^+(\psi)(q) := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP)(\psi)(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q\psi(q) - \psi'(q))$$

$$(2) \quad a^-(\psi)(q) := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)(\psi)(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q\psi(q) + \psi'(q))$$

Temos

$$a^-[a^+(\psi)(q)] = a^-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(q\psi(q) - \psi'(q))\right] = \frac{1}{2}[q^2\psi(q) + \psi(q) - \psi''(q)]$$

$$a^+[a^-(\psi)(q)] = a^+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(q\psi(q)+\psi'(q))\right] = \frac{1}{2}[q^2\psi(q)-\psi(q)-\psi"(q)]$$

Concluimos assim que:

$$a^-a^+(\psi)(q) - a^+a^-(\psi)(q) = I_{L^2(\mathbb{R},dx)}(\psi(q))$$

logo

$$\left[a^-, a^+\right] = I_{L^2(\mathbb{R},dx)}.$$

Referências

[1] Y. M. Berezansky. *Selfadjoint Operators in Sapces of Functions of Infinite Many Variables*, volume 63 of *Trans. Amer. Math. Soc.* American Mathematical Society, 1986.

[2] Y. M. Berezansky, Z. G. Sheftel, and G. F. Us. *Functional Analysis*, volume 1. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

[3] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, and A. M. Vershik. Representations of the group of diffeomorphisms. *Russian Math. Surveys*, 30(6):3–50, 1975.

[4] A. Guichardet. *Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics*. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[5] Y. Ito and I. Kubo. Calculus on Gaussian and Poisson white noises. *Nagoya Math. J.*, 111:41–84, 1988.

[6] E. B. McBride. *Obtaining Generating Functions*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[7] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I. Academic Press, Inc., New York and London, 1975.

[8] J. L. Silva. *Studies in non-Gaussian Analysis*. PhD thesis, Universidade da Madeira, September 9, 1998.