Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability
and Related Topics
Vol. 9, No. 4 (2006) 547–566
© World Scientific Publishing Company

World Scientific
www.worldscientific.com

RENORMALISATION DU TEMPS LOCAL DES POINTS TRIPLES DU MOUVEMENT BROWNIEN

R. JENANE*, R. HACHAICHI and L. STREIT†

Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques,
Université de Tunis el Manar, Tunisia

BiBoS, Univ. Bielefeld, D-33615 Bielefeld, Germany

†*CCM, Univ. da Madeira, Funchal, Portugal*

**raoudha.jenane@fst.rnu.tn*

†*streit@physik.uni-bielefeld.de*

Received 4 March 2005
Revised 13 January 2006
Communicated by M. Röckner

We show that each term of the multiple Wiener integral expansion for the renormalized triple self-intersection local time of higher dimensional Brownien motion converges in law to an independent Brownian motion.

1. Introduction

Les intersections des trajectoires du mouvement brownien font l'objet d'études qui datent des années quarantes[25] et depuis un grand nombre de résultats sur le temps local d'intersection du mouvement brownien a été obtenu. On peut cependant considérer les intersections simples des trajectoires du mouvement brownien entre eux mais aussi avec d'autres mouvements browniens indépendants.[1] On peut par ailleurs envisager aussi bien les intersections simples[5] que les intersections multiples.[6] La réponse aux questions liées á ce problème dépend en général de la dimension d du mouvement brownien. En 1957, Dvoretzky et les coauteurs de[6] montrent que dans un espace de dimension 3 les trajectoires du mouvement brownien avec points triples sont de probabilité zéro. En 1978, Wolpert[43] étudie certaines propriétés des intersections de processus de Wiener dans le plan, il construit aussi une fonctionnelle qui mesure la "quantité" relative á l'intersection des trajectoires de k processus. En 1986, Rosen donne dans[34] une généralisation de la formule de Varadhan, pour $n = 2$, présentant ainsi une renormalisation du temps local de n intersections du mouvement brownien plan. A la même année Le Gall donne, dans,[24] une approximation des intersections du mouvement brownien par celles de la saucisse de Wiener. En 1988, Dynkin[9] fait une étude sur une classe de champs aléatoires associés aux points multiples d'une marche aléatoire dans le plan. Shieh[36] utilise la théorie de Hida[17] sur les fonctionnelles généralisées du mouvement brownien pour établir une formule intégrale stochastique concernant les temps locaux d'intersections triples du mouvement brownien plan. Dans l'article,[10] de Faria et les coauteurs calculent les chaos ou le développement en intégrales de Wiener multiples, d'une forme régularisée, du temps local des intersections simples du mouvement brownien de dimension d. Watanabe[40] montre que, lorsque d croit, alors les troncations successives (omission des chaos d'ordres inferieurs) du développement chaotique sont suffisantes pour que le temps local tronqué soit une fonctionnelle généralisée du mouvement brownien. Pour le cas des intersections multiples, dans,[27] les auteurs déterminent le nombre r de troncations suffisantes pour obtenir une fonctionnelle généralisée du mouvement brownien de dimension d, calculent les noyaux du développement chaotique et étudient leurs propriétés L^2 en dimensions 1 et 2.

Dans le présent travail, on donne une renormalisation du temps local des points triples du mouvement brownien pour $d \geq 3$. Une définition informelle de ce temps local, en termes d'une intégrale de la fonction de Dirac ou de Donsker δ, est donnée par la formule suivante:

$$L_{3,T} = \int_{\Delta_3} dt^3 \delta(\mathbf{B}(t_3) - \mathbf{B}(t_2))\delta(\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1)) \tag{1.1}$$

où δ est la distribution de Dirac.

Pour donner un sens á (1.1), on regularise les δ. Pour obtenir une limite non triviale il faudra les centrer, voir[32]:

$$L_{\varepsilon,T} = \int_{\Delta_3} d^3t \delta_{\varepsilon,c}(\mathbf{B}(t_3) - \mathbf{B}(t_2))\delta_{\varepsilon,c}(\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1))$$

avec:

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{B}(t_k) - \mathbf{B}(t_{k-1})) = (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon}(\mathbf{B}(t_k) - \mathbf{B}(t_{k-1}))^2\right]$$

où $\delta_{\varepsilon,c} = \delta_\varepsilon - E(\delta_\varepsilon)$, et où:

$$\Delta_3 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq T\} \tag{1.2}$$

$L_{\varepsilon,T}$ dépend intuitivement du triplet de "temps" t_1, t_2, t_3 pour lesquels le mouvement brownien $\mathbf{B}$ se trouve au mme point, i.e. $\mathbf{B}(t_1) = \mathbf{B}(t_2) = \mathbf{B}(t_3)$. Pour le cas des intersections multiples du mouvement brownien plan, $d = 2$, voir les résultats obtenus par exemple dans.[4,35] Ici on étudiera $L_{\varepsilon,T}$ pour $d \geq 3$ en utilisant les mêmes techniques que Refs. 10 et 27. Il s'agit de renormaliser $L_{\varepsilon,T}$ par une fonction multiplicative définie par

$$r(\varepsilon) = \varepsilon^{d-\frac{5}{2}} \tag{1.3}$$

telle qu'on obtienne une limite non triviale quand $\varepsilon \to 0$, en étudiant le développement en chaos du temps local triple renonormalisé $r(\varepsilon)L_{\varepsilon,T}$, on montrera que chaque chaos d'ordre $\mathbf{n}$ converge en loi vers un mouvement brownien.

2. Elements D'analyse Gaussienne

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement quelques notions de l'analyse du bruit blanc qu'on utilise dans le cadre de ce travail. Pour plus de détails voir.[17] Soit l'espace de Hilbert $L^2_d(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, des fonctions de carré intégrables á valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On considère l'espace nucléaire $S_d(\mathbb{R})$ des fonctions de Schwartz á valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La topologie de $S_d(\mathbb{R})$ est définie par une famille croissante de normes hilbertiennes:

$$|\mathbf{f}|_p^2 = \sum_{i=1}^{d} |f_i|_p^2 \tag{2.1}$$

où $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_d) \in S_d(\mathbb{R})$ et $|f_i|_p^2 = \sum_{k=0}^{p} \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^p |f_i^{(k)}(x)|^2 dx$.

On considère le mouvement brownien á valeurs vectorielles suivant:

$$\mathbf{B} : S'_d(\mathbb{R}) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^d \tag{2.2}$$

tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $T > 0$, on ait:

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}, t) = \langle \boldsymbol{\omega}, I_{[0,t]} \rangle = \int_0^t \boldsymbol{\omega}(t) dt \tag{2.3}$$

avec $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$, où les bruits blancs ω_k sont supposés indépendants, et où $S'_d(\mathbb{R})$ est l'espace dual de $S_d(\mathbb{R})$ des distributions tempérées vectorielles. On a alors le triplet de Gelfand suivant:

$$S_d(\mathbb{R}) \subset L^2_d(\mathbb{R}) \subset S'_d(\mathbb{R})$$

La dualité entre $S'_d(\mathbb{R})$ et $S_d(\mathbb{R})$ qui prolonge le produit scalaire dans $L^2_d(\mathbb{R})$ est notée $\langle \, , \rangle$. On définit sur $S'_d(\mathbb{R})$ la mesure gaussienne canonique μ_d détérminée par la fonction caractéristique:

$$c(\boldsymbol{f}) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} f_i^2(t) dt \right) = e^{-\frac{1}{2}\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{f} \rangle} \tag{2.4}$$

où $\mathbf{f} \in S_d(\mathbb{R})$. On note:

$$L^2(S'_d(\mathbb{R}), \mu_d) \equiv (L^2) \tag{2.5}$$

et:

$$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d \,, \qquad n = \sum_{i=1}^{d} n_i \,, \qquad \mathbf{n}! = \prod_{i=1}^{d} n_i! \,.$$

$$: \boldsymbol{\omega}^{\otimes \mathbf{n}} := \bigotimes_{i=1}^{d} : \omega_i^{\otimes n_i} : \,. \tag{2.6}$$

Alors tout élément F de l'espace de Hilbert (L^2) admet un développement chaotique de Wiener:

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{n}} \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes \mathbf{n}} :, F_{\mathbf{n}} \rangle \,.$$

Pour les $F_{\mathbf{n}}$, grce á l'isométrie de Wiener–Itô–Ségal, on a:

$$(F_{\mathbf{n}})_{\mathbb{N}^d} \in \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \operatorname{Sym} L^2(\mathbb{R}^k, k!d^k t)\right)^{\otimes d} \simeq (L^2)\,. \tag{2.7}$$

3. Developpement Chaotique du Temps Local des Intersections Triples

Soit δ_ε l'élément de (L^2), défini pour tout $\varepsilon > 0$ par:

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{B}(t_k) - \mathbf{B}(t_{k-1})) = (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \prod_{l=2}^{d} e^{[-\frac{1}{2\varepsilon}((B_l(t_k)-B_l(t_{k-1}))^2]}\,.$$

On se propose alors d'étudier la limite, quand $\varepsilon \to 0$, du processus stochastique suivant:

$$L_{\varepsilon,T} = \int_{\Delta_3} d^3t\delta_{\varepsilon,c}(\mathbf{B}(t_3) - \mathbf{B}(t_2))\delta_{\varepsilon,c}(\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1))$$

où $\delta_{\varepsilon,c} = \delta_\varepsilon - E(\delta_\varepsilon)$ et $\Delta_3 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq T\}$. Dans Refs. 10 et 11, les auteurs introduisent l'élément δ_ε de (L^2) et donnent explicitement sa transformée par S en $\mathbf{f} \in S_d(\mathbb{R})$.

Remarque 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, le temps local des intersections triples $L_{\varepsilon,T} \in (L^2)$.

Dans ce paragraphe on se propose de déterminer les fonctions noyaux dans le développement chaotique de $L_{\varepsilon,T}$:

$$L_{\varepsilon,T}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{n}} \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes \mathbf{n}} :, F_{\mathbf{n}}\rangle\,.$$

Ces fonctions peuvent tre exprimées á l'aide de certaines fonctions, dépendant seulement de quatres variables, qu'on va introduire pour préparer le résultat fondamental de ce paragraphe:

Définition 1. Soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit σ une permutation ordonnante, i.e. $u_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq u_{\sigma(n)}$. On note le p^{eme} élément de la suite ordonnée par:

$$(u)_p = u_{\sigma(p)} \tag{3.1}$$

En particulier on a: $(u)_1 = \min_{1\leq i\leq n} u_i$ et $(u)_n = \sup_{1\leq i\leq n} u_i$.

Définition 2. Soient $d \geq 3$, p, $s > 0$ des entiers, et $\varepsilon > 0$. Pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, on définit la fonction:

$$g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{x_2}^{x_3} (t - x_1 + \varepsilon)^{1-\frac{p+d}{2}} (x_4 - t + \varepsilon)^{1-\frac{s+d}{2}} dt\,. \tag{3.2}$$

On donne ultérieurement les propriétés des fonctions g_{ps} utiles pour le reste de ce travail.

Théorèm 1.[27] *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $d \geq 3$, le temps local des intersections triples $L_{\varepsilon,T}$ a des noyaux définis comme suit: pour $\mathbf{n}$ "pair", i.e. $\frac{n_i}{2} \in \mathbb{N} \forall\, i$*

$$F_{\mathbf{n}}(u^1, \ldots, u^d) = \sum_{\substack{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n} \\ \mathbf{p}\text{ "pair"}}} F_{\mathbf{ps}}(u^1, \ldots, u^d) \tag{3.3}$$

et sinon

$$F_{\mathbf{n}}(u^1, \ldots, u^d) = 0$$

avec

$$\begin{aligned} &F_{\mathbf{ps}}(u^1, \ldots, u^d) \\ &\quad = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+s}{2}} (2\pi)^{-d} 1_{[0,T]^n}(u) \\ &\qquad \times \frac{\mathbf{p}!\mathbf{s}!}{\mathbf{n}!\frac{\mathbf{p}}{2}!\frac{\mathbf{s}}{2}!} \frac{1}{(1-\frac{p+d}{2})(1-\frac{s+d}{2})} 1_{E_{\mathbf{p}}}(u) \\ &\qquad \times \{g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_{ps}(0, x_2, x_3, T) - g_{ps}(0, x_2, x_3, x_4) - g_{ps}(x_1, x_2, x_3, T)\} \end{aligned}$$

où g_{ps} est la fonction définie par (3.2),

$$u = (u^1, \ldots, u^d)\,, \tag{3.4}$$

$$u^i = (u^i_1, \ldots, u^i_{p_i}, u^i_{p_i+1}, \ldots, u^i_{p_i+s_i}) \tag{3.5}$$

et

$$x_1(u) = \min_{i,k} u^i_k\,, \tag{3.6}$$

$$x_2(u) = \sup_i (u^i)_{p_i}\,, \tag{3.7}$$

$$x_3(u) = \min_i (u^i)_{p_i+1}\,, \tag{3.8}$$

$$x_4(u) = \max_{i,k} u^i_k\,. \tag{3.9}$$

$E_{\mathbf{p}}$ est l'ensemble des variables u tels que:

$$0 < x_2(u) < x_3(u)\,. \tag{3.10}$$

Remarque 2. Dans toute la suite on pose: $x_i = x_i(u, \mathbf{p}, \mathbf{s})$, mais on peut supprimer les paramètres $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ s'il n'y a pas un risque de confusion.

Le terme d'ordre $\mathbf{n}$ du temps local des intersections triples $L_{\epsilon,T}$ s'écrit comme somme de deux fonctions $M_T(\varepsilon,\mathbf{n},\boldsymbol{\omega})$ et $N_T(\varepsilon,\mathbf{n},\boldsymbol{\omega})$:

Définition 3. On met

$$M_T(\varepsilon,\mathbf{n},\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} c_{\mathbf{ps}}\langle g_{ps}(x_1,x_2,x_3,x_4)1_{E_{\mathbf{p}}}, :\omega^{\otimes\mathbf{n}}:\rangle\,,$$

$$\begin{aligned} N_T(\varepsilon,\mathbf{n},\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} & c_{\mathbf{ps}}\langle\{g_{ps}(0,x_2,x_3,T) - g_{ps}(0,x_2,x_3,x_4) \\ & - g_{ps}(x_1,x_2,x_3,T)\}1_{E_{\mathbf{p}}}, :\omega^{\otimes\mathbf{n}}:\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Le terme d'ordre $\mathbf{n}$ du temp local $L_{\epsilon,T}$ est donc

$$K_T(\varepsilon,\mathbf{n},\boldsymbol{\omega}) = M_T(\varepsilon,\mathbf{n},\boldsymbol{\omega}) + N_T(\varepsilon,\mathbf{n},\boldsymbol{\omega})\,.$$

Remarque 3. (1) On peut écrire M_T comme une intégrale d'Itô:

$$M_T = \int_0^T d\mathbf{B}(\tau)\mathbf{m}(\tau) = \sum_{i=1}^d M_{i,T} = \sum_{i=1}^d \int_0^T dB_i(\tau)m_i(\tau) \tag{3.12}$$

où:

$$m_i(\tau) = \sum_{\substack{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n} \\ \mathbf{p},\mathbf{s}\text{“pair“}}} n_i c_{ps}\langle 1_{[0,\tau]^n}1_{E_{\mathbf{p}}}g_{ps}(x_1,x_2,x_3,\tau), :\boldsymbol{\omega}^{\otimes\mathbf{n}-\delta_i}:\rangle\,. \tag{3.13}$$

(2) Les deux processus stochastiques M_T et N_T sont continus, et d'autre part lorsque ε tend vers zéro M_T est plus singulier que N_T. De plus on montre plus loin que M_T est une martingale brownienne.

La représentation du processus $M_{i,T}$ sous la forme d'une intégrale stochastique dans (3.12) est dûe á la formule de Clark-Ocone, voir.[12,20]

4. Résultats Principaux

Dans ce papier, on se propose de prouver les deux théorèmes suivants:

Théorème 2. *Pour $d \geq 3$, les renormalisées des processus $M_{i,\cdot}$ convergent en loi vers des mouvements browniens $\beta_{i,\cdot}$:*

$$(rM_{i,T}(\varepsilon,\mathbf{n},\cdot); i=1,\ldots,d; T>0)\mathcal{L}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}(C_{i,\mathbf{n}}\beta_{i,T}(\cdot); i=1,\ldots,d; T>0)$$

avec $r(\varepsilon) = \varepsilon^{d-\frac{5}{2}}$.

Théorème 3. *Pour $d \geq 3$, les termes de chaque ordre $\mathbf{n}$ du temps local des intersections triples renormalisé $L_{\varepsilon,\cdot}$ convergent en loi vers des mouvements browniens*:

$$(rK_T(\varepsilon,\mathbf{n},\cdot); T>0)\mathcal{L}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}(c_{\mathbf{n}}\beta_T(\cdot); T>0)\,.$$

5. Preuves

L'observation cruciale pour le contrôle des limites est la

Proposition 1. *Les processus $M_{i,\cdot}$ sont des martingales browniennes orthogonales.*

Démonstration: L'orthogonalité est une conséquence de l'orthogonalité des polynômes de Wick. La propriété de martingale est dûe au fait que les fonctions noyaux M_T, dans (3.12), ne dépendent pas de T sauf sur les bornes d'intégration, voir Refs. 3, 16 et 22.

5.1. *Preuve du Théorème* 2

Selon le théorème VIII.3.11 de[19] il suffit d'étudier la convergence en probabilité des processus de covariance quadratique $\langle rM_i, rM_k\rangle_T$ de ces martingales dûment renormalisées vers ceux de d browniennes. Il est donc suffisant de montrer que

$$E(\langle rM_i, rM_k\rangle_T) \longrightarrow \text{const.} \cdot \delta_{ik} T$$

et

$$\langle rM_i, rM_k\rangle_T - E(\langle rM_i, rM_k\rangle_T) \longrightarrow 0$$

comme suit.

Proposition 2. *Soit $d \geq 3$ et $r^2(\varepsilon) = \varepsilon^{2d-5}$, on a:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E(\langle rM_i, rM_k\rangle_T) = c_{\mathbf{n}}\delta_{i,k}T \tag{5.1}$$

où $c_{\mathbf{n}} \geq 0$ est une constante.

Proposition 3. *Soit $d \geq 3$ et $r^2(\varepsilon) = \varepsilon^{2d-5}$, on a:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\langle rM_i, rM_k\rangle_T - E(\langle rM_i, rM_k\rangle_T)) = 0\,. \tag{5.2}$$

5.1.1. *Preuve de la Proposition* 2

Par l'orthogonalité des M_i et leur développement (3.12) on a:

$$\begin{aligned} E(\langle rM_i, rM_k\rangle_T) &= E(r^2 M_i M_k) \\ &= \delta_{i,k}\frac{n_k^2}{n^2}\mathbf{2n}!r^2\left\|\sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} c_{\mathbf{ps}}g_{ps}(x_1,x_2,x_3,x_4)1_{E_{\mathbf{p}}}\right\|^2_{L^2[0,T]^n} \\ &= \delta_{i,k}c_{n_i}r^2\sum_{\substack{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}\\ \mathbf{p}'+\mathbf{s}'=\mathbf{n}}} c_{\mathbf{ps}}c_{\mathbf{p's'}}\langle g_{ps}1_{E_{\mathbf{p}}}, g_{p's'}1_{E_{\mathbf{p}'}}\rangle \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer

Lemme 1. $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2d-5}\langle g_{ps}1_{E_{\mathbf{p}}},\ g_{p's'}1_{E_{\mathbf{p}'}}\rangle_{L^2([0,T]^{2n})} = c_{\mathbf{ps}}c_{\mathbf{p's'}}T$ *où* $c_{\mathbf{ps}}c_{\mathbf{p's'}}$ *est positif si* $\forall\ 1\leq i\leq d$ *on a* $p_i\leq p'_i$ *(ou vice versa), et zéro, sinon.*

Démonstration: On met

$$\begin{aligned}I(T,\varepsilon) &\equiv \langle g_{ps}1_{E_{\mathbf{p}}}, g_{p's'}1_{E_{\mathbf{p}'}}\rangle \\ &= \int_0^T d^n u 1_{E_{\mathbf{p}}}(u)1_{E_{\mathbf{p}'.}}(u) g_{ps}(x_1,x_2,x_3,x_4)g_{p's'}(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)\end{aligned}$$

et on vérifie par un changement de variables $u\to v=u/T$,

$$I(T,\varepsilon)=T^{6-2d}I(1,\varepsilon/T) \tag{5.3}$$

et après renormalisation

$$\varepsilon^{2d-5}I(T,\varepsilon)=T(\varepsilon/T)^{2d-5}I(1,\varepsilon/T)\,. \tag{5.4}$$

On va donc étudier l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2d-5}I(1,\varepsilon)$; On a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2d-5}I(T,\varepsilon)=T\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2d-5}I(1,\varepsilon)\,. \tag{5.5}$$

A cause de (5.3), avec $\varepsilon\to 1$ et puis $T\to 1/\varepsilon$, on a encore

$$I(1,\varepsilon)=\varepsilon^{6-2d}I(1/\varepsilon,1)\,, \tag{5.6}$$

donc

$$\varepsilon^{2d-5}I(1,\varepsilon)=\varepsilon I(1/\varepsilon,1)\,. \tag{5.7}$$

Il reste á vérifier l'existence de la limite dans cette dernière expression. D'après la définition de x_i et x'_i, la borne inférieure des n variables d'intégration coíncide respectivement avec x_1 et x'_1, et la borne supérieure concide respectivement avec x_4 et x'_4, d'où on a:

$$\begin{aligned}I(1/\varepsilon,1)=\langle g_{ps}1_{E_{\mathbf{p}}}, g_{p's'}1_{E_{\mathbf{p}'.}}\rangle &= \int_0^{1/\varepsilon} d^n u 1_{E_{\mathbf{p}}}(u)1_{E_{\mathbf{p}'.}}(u)\\ &\times\int_{x_2}^{x_3}(t_1-x_1+1)^{1-\frac{d+p}{2}}(x_4-t_1+1)^{1-\frac{d+s}{2}}dt_1\\ &\times\int_{x'_2}^{x'_3}(t_2-x_1+1)^{1-\frac{d+p'}{2}}(x_4-t_2+1)^{1-\frac{d+s'}{2}}dt_2\,.\end{aligned}$$

Rappelons que

$$u=(u_1^1,\ldots,u_{p_1}^1,u_{p_1+1}^1,\ldots,u_{n_1}^1,\ldots,u_1^d,\ldots,u_{n_d}^d)$$

avec:

$$(u^i)_1\leq\cdots\leq(u^i)_{p_i}\leq(u^i)_{p_i+1}\leq\cdots\leq(u^i)_{n_i}\,,\qquad\forall\ 0\leq i\leq d \tag{5.8}$$

et de plus $\forall\ 0\leq i,\ j\leq d$ on a:

$$(u^i)_{p_i}\leq x_2(u)\leq x_3(u)\leq(u^j)_{p_j+1} \tag{5.9}$$

de même:

$$(u^i)_{p'_i} \leq (u^j)_{p'_j+1}\,.$$

On a essentiellement deux cas á étudier:
1^{er}cas: si $\exists\ 0 \leq i,\ j \leq d$ tels que $p_i < p'_i$ et $p_j > p'_j$, alors on obtient:

$$(u^j)_{p_j} \leq (u^i)_{p_i+1} \leq (u^i)_{p'_i} \leq (u^j)_{p'_j+1}$$

ce qui est impossible d'après (5.8) et l'inégalité $p_j > p'_j$, donc $p_j > p'_j + 1$, sauf si $E_{\mathbf{p}} \cap E_{\mathbf{p}'} \subseteq \{u : (u^j)_{p_j} = (u^j)_{p'_j+1}\}$, qui est de mesure nulle, et par suite:

$$\langle g_{ps} 1_{E_{\mathbf{p}}}, g_{p',s'} 1_{E_{\mathbf{p}'}} \rangle = 0\,.$$

2^{eme}cas: $\forall\ 0 \leq i \leq d$ on a $p_i \leq p'_i$ (ou vice versa).

Alors, (5.8), (3.8) et (3.7) impliquent

$$x_2(u) \leq x_3(u) \leq x'_2(u) \leq x'_3(u)$$

donc

$$\begin{aligned}
&I(1/\varepsilon, 1)\\
&\quad = \int d^n u 1_{E_{\mathbf{p}}}(u) 1_{E_{\mathbf{p}'}}(u) g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) g_{p's'}(x_1, x'_2, x'_3, x_4)\\
&\quad = cte. \int_{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x'_2 \leq x'_3 \leq x_4 \leq 1/\varepsilon} dx_1 dx_2 dx_3 dx'_2 dx'_3 dx_4\\
&\qquad (x_2 - x_1)^{p-2} (x'_2 - x_3)^{p'-p-2} (x_4 - x'_3)^{s'-2}\\
&\qquad \times g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) g_{p's'}(x_1, x'_2, x'_3, x_4)\\
&\quad = cte. \int_{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq t_1 \leq x_3 \leq x'_2 \leq t_2 \leq x'_3 \leq x_4 \leq 1/\varepsilon} dx_1 dx_2 dt_1 dx_3 dx'_2 dt_2 dx'_3 dx_4\\
&\qquad \frac{(x_2 - x_1)^{p-2} (x'_2 - x_3)^{p'-p-2} (x_4 - x'_3)^{s'-2}}{(t_1 - x_1 + 1)^{\frac{p+d}{2}-1} (x_4 - t_1 + 1)^{\frac{s+d}{2}-1} (t_2 - x_1 + 1)^{\frac{p'+d}{2}-1} (x_4 - t_2 + 1)^{\frac{s'+d}{2}-1}}\\
&\quad = cte. \int_{0 \leq x_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq x_4 \leq 1/\varepsilon} dx_1 dt_1 dt_2 dx_4\\
&\qquad \frac{(t_1 - x_1)^{p-1} (t_2 - t_1)^{p'-p} (x_4 - t_2)^{s'-1}}{(t_1 - x_1 + 1)^{\frac{p+d}{2}-1} (x_4 - t_1 + 1)^{\frac{s+d}{2}-1} (t_2 - x_1 + 1)^{\frac{p'+d}{2}-1} (x_4 - t_2 + 1)^{\frac{s'+d}{2}-1}}\,.
\end{aligned}$$

Après un changement de variables

$$\begin{aligned}
y_1 &= t_1 - x_1\,,\\
y_2 &= t_2 - t_1\,,\\
y_3 &= x_4 - t_2\,,\\
y_4 &= 1/\varepsilon - x_4
\end{aligned}$$

on trouve

$$\varepsilon I(1/\varepsilon, 1) = \alpha_{pp'}$$

$$\times \int_{y_k \geq 0, \sum y_k \leq 1/\varepsilon} \frac{y_1^{p-1} y_2^{p'-p} y_3^{s-1} (1 - \varepsilon \sum_1^3 y_k) dy_1 dy_2 dy_3}{(y_1+1)^{\frac{p+d}{2}-1} (y_2+y_3+1)^{\frac{s+d}{2}-1} (y_1+y_2+1)^{\frac{p'+d}{2}-1} (y_3+1)^{\frac{s'+d}{2}-1}},$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2d-5} \langle g_{ps}^{(d)} 1_{E_{\mathbf{p}}}, g_{p's'}^{(d)} 1_{E_{\mathbf{p}'}} \rangle_{L^2([0,T]^{2n})} = a_{pp'} T$$

avec

$$a_{pp'}$$

$$= \alpha_{pp'} \int_0^\infty d^3 y \frac{y_1^{p-1} y_2^{p'-p} y_3^{s-1}}{(y_1+1)^{\frac{p+d}{2}-1} (y_2+y_3+1)^{\frac{s+d}{2}-1} (y_1+y_2+1)^{\frac{p'+d}{2}-1} (y_3+1)^{\frac{s'+d}{2}-1}} \tag{5.10}$$

positif et fini pour tout $d \geq 3$.

5.1.2. *Preuve de la Proposition* 3

Il faudra montrer que le crochet centré suivant:

$$\langle rM_i, rM_k \rangle_T - E(\langle rM_i, rM_k \rangle_T) = r^2 \delta_{ik} \int_0^T d\tau (m_i(\tau))_c^2$$

converge vers zéro. Pour celà il suffit de montrer que:

$$r^4 E\left(\int_0^T d\tau (m_i(\tau))_c^2 \int_0^T d\tau' (m_i(\tau'))_c^2 \right) \longrightarrow 0\,.$$

Pour la décomposition chaotique de m^2

$$(m_i(\tau))_c^2 \equiv \sum_{\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k}>0} \left\langle :\omega^{\otimes 2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k})}:, \hat{G}^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_i-\mathbf{k})}(\tau) \right\rangle \tag{5.11}$$

on voudra déterminer les noyaux $\hat{G}^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_i-\mathbf{k})}(\tau)$. Pour les produits de monômes ordonnés de Wick, on a (Corr. 2.13 de Ref. 17):

$$\langle :\omega^{\otimes \mathbf{n}}:, f \rangle \langle :\omega^{\otimes \mathbf{n}}:, g \rangle = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{k}! \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}^2 \left\langle :\omega^{\otimes 2(\mathbf{n}-\mathbf{k})}:, h_{2(\mathbf{n}-\mathbf{k})} \right\rangle \tag{5.12}$$

avec:

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{k}} &\equiv f \hat{\otimes}_{\mathbf{k}} g \\ &\equiv \mathrm{Sym} \int du^1_{n_1-k_1+1} \cdots du^1_{n_1} \cdots du^d_{n_d-k_d+1} \cdots du^d_{n_d} \\ &\quad \times f(\cdot, u^1_{n_1-k_1+1}, \ldots, u^1_{n_1}, \ldots, \cdot, u^d_{n_d-k_d+1}, \ldots, u^d_{n_d}) \\ &\quad \times g(\cdot, u^1_{n_1-k_1+1}, \ldots, u^1_{n_1}, \ldots, u^d_{n_d-k_d+1}, \ldots, u^d_{n_d})\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Vu que dans L^2, la symétrisation est une projection, on arrive á une majorante pour la norme L^2 si on l'omet. On est amené donc á:

$$G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k})}(\tau) = \sum_{p,p'} c_{\mathbf{ps}} c_{\mathbf{p's'}} g_{ps}(x_1, x_2, x_3, \tau) 1_{E_\mathbf{p}} \hat{\underset{\mathbf{k}}{\otimes}} g_{p's'}(x'_1, x'_2, x'_3, \tau) 1^2_{E_{\mathbf{p}'}}$$

et á montrer la convergence vers zero, quand $\varepsilon \to +0$, de la majorante de:

$$\left\| \int_0^T d\tau G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k})}(\tau) \right\|_{L^2([0,T]^{2(n-k-1)})}.$$

On va d'abord construire des bornes supérieures pour les fonctions G, et ensuite montrer la convergence vers zéro, quand $\varepsilon \to 0$, des normes de leurs majorantes.

Notation 1. On pose:

$$H_{p,s}(u) = c_{p,s}(\varepsilon)\theta(\tau - (u)_{p+s-1})((u)_p - (u)_1 + \varepsilon)^{\frac{1-p}{2}}(\tau - (u)_{p+1} + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}} \times (\tau - (u)_1 + \varepsilon)^{-1}$$

avec:

$$c_{p,s}(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{3-d} & si\ p \geq 2, s \geq 2 \\ \sqrt{-\log(\varepsilon)}\varepsilon^{3-d} & si\ p = 1, s \geq 2\ ou\ p \geq 2, s = 1 \\ -\log(\varepsilon)\varepsilon^{3-d} & si\ p = s = 1 \end{cases}$$

$$H_{0,s}(u) = \sqrt{-\log(\varepsilon)}\varepsilon^{3-d}\theta(\tau - (u)_{s-1})(\tau - (u)_1 + \varepsilon)^{-\frac{s}{2}} \quad si\ s \geq 2\,.$$

On pose aussi:

$$H_{-1,s}(u) = H_{p,0}(u) = 0\ si\ p \geq 0\,.$$

Lemme 2. *Ils existent des constantes positives c telles que pour tout* $0 \leq k \leq n-2$ *on a*:

$$0 \leq G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_i-\mathbf{k})}(u, u') \leq c \sum_{\substack{p+s=p'+s'=n-k \\ p,p' \geq 0, s,s' \succ 0}} H_{p,s}(u) H_{p',s'}(u')\,.$$

Démonstration: On fait une récurrence sur k.

(1) Pour $k = 0$, l'inégalité suit du Lemme 8 de l'Appendice.

(2) On suppose que l'estimation est vérifiée á l'ordre k, $0 \leq k < n-2$. On obtient alors:

$$\begin{aligned} G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_i-\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_\mathbf{j})}(u, u') &= \int_0^T du_{2(n-2-k)} G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k})}(u, u') \\ &\leq c \sum_{\substack{p+s=p'+s'=n-k \\ p,p' \geq 0, s,s' > 0}} \int_0^T du_{2(n-2-k)} H_{p,s}(u) H_{p',s'}(u') \end{aligned}$$

le résultat de ce lemme découlera des deux lemmes suivants:

Lemme 3. *Soit* $p+s=n>2$. *Si* $p\geq 1,\ s\geq 1$, *alors il existe* $0<c<\infty$ *tel que*:

$$\int_0^T du_{n-1}H^2_{p,s}(u)\leq c(H^2_{p-1,s}+H^2_{p,s-1})(\hat{u})$$

avec

$$\hat{u}\equiv(u_1,\ldots,u_{n-2})\,.$$

Démonstration: si $p\geq 1$, on a:

$$H^2_{p,s}(u)=(\tau-(u)_1+\varepsilon)^{-2}K_{p,s}$$

avec:

$$\begin{aligned}K_{p,s}(u)&=K_{p,s}((u)_1,(u)_p,(u)_{p+1},(u)_{n-1},\tau)\\&=\varepsilon^{6-2d}\theta(\tau-x_4)\theta(x_3-x_2)(\tau-x_3+\varepsilon)^{1-s}(x_2-x_1+\varepsilon)^{1-p}\,.\end{aligned}$$

et il est clair que:

$$(\tau-(u)_1+\varepsilon)^{-2}\leq(\tau-(\hat{u})_1+\varepsilon)^{-2}\,,$$

donc

$$\int_0^T du_{n-1}H^2_{p,s}(u)\leq(\tau-(\hat{u})_1+\varepsilon)^{-2}\int_0^T du_{n-1}K_{p,s}(u)\,.$$

Pour $p>1$, on vérifie qu' il existe $0<c<\infty$:

$$\begin{aligned}&\int_0^T du_{n-1}K_{p,s}(u)\\&\quad\leq c(K_{p-1,s}((\hat{u})_1,(\hat{u})_{p-1},(\hat{u})_p,(\hat{u})_{n-2},\tau)+K_{p,s-1}((\hat{u})_1,(\hat{u})_p,(\hat{u})_{p+1},(\hat{u})_{n-2},\tau))\,,\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T du_{n-1}H^2_{p,s}(u)\leq c(H^2_{p-1,s}(\hat{u})+H^2_{p,s-1}(\hat{u}))\,.$$

Si $p=1,\ s\geq 2$, on trouve:

$$\int_0^T du_{n-1}H^2_{1,s}(u)\leq c(H^2_{0,s}(\hat{u})+H^2_{1,s-1}(\hat{u}))\,.$$

Si $p=0,\ s\geq 3$, on a:

$$\int_0^T du_{n-1}H^2_{0,s}(u)\leq cH^2_{0,s-1}(\hat{u})\,.$$

Si $p\geq 2,\ s=1,t$ on a:

$$\int_0^T du_{n-1}H^2_{p,1}(u)\leq cH^2_{p-1,1}(\hat{u})\,.$$

A base de ce résultat et en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwartz, on conclut:

Lemme 4. *Pour* $p,\ p' \geq 0$ *et* $s,\ s' \geq 1$, *vérifiant*: $p+s = p'+s' > 2$

$$\int_0^T du_{n-1} H_{p,s}(u) H_{p',s'}(u')|_{u'_{n-1}=u_{n-1}}$$
$$\leq cte.(H_{p-1,s}(\hat{u})H_{p'-1,s'}(\hat{u}') + H_{p,s-1}(\hat{u})H_{p',s'-1}(\hat{u}')$$
$$+ H_{p-1,s}(\hat{u})H_{p',s'-1}(\hat{u}') + H_{p,s-1}(\hat{u})H_{p'-1,s'}(\hat{u}'))\,.$$

Maintenant on est bien équipé pour montrer que les noyaux $G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k})}$, et donc les crochets centrés, convergent vers zéro.

Lemme 5. *Pour* $0 \leq k \leq n-2$, *on a*:

$$r^4 \|G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k})}\|^2_{L^2([0,T]^{2(n-k-1)})} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Démonstration: Il suffit de prouver que la limite des normes $r^4(\varepsilon,d)\| \int_0^T d\tau H_{p,s} H_{p',s'}\|^2$ converge vers zero, quand $\varepsilon \to +0$, dans $L^2([0,T]^{2(n-k-1)})$. Si p, s, p, $s' \geq 2$, on a:

$$r^4(\varepsilon,d)\left\|\int_0^T d\tau H_{p,s}H_{p',s'}\right\|^2_{L^2([0,T]^{2(n-k-1)})}$$
$$= 2\varepsilon^2 \int du \int du' \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' \theta(\tau - x_4 \vee x_4')\theta(\tau' - x_4 \vee x_4') 1_{E_\mathbf{p}}(u) 1_{E_{\mathbf{p}'}}(u')$$
$$\times (\tau - x_3 + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}} (\tau - x_3' + \varepsilon)^{\frac{1-s'}{2}} (\tau' - x_3 + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}} (\tau' - x_3' + \varepsilon)^{\frac{1-s'}{2}} (x_2 - x_1 + \varepsilon)^{1-p}$$
$$\times (x_2' - x_1' + \varepsilon)^{1-p'} (\tau - x_1 + \varepsilon)^{-1} (\tau - x_1' + \varepsilon)^{-1} (\tau' - x_1 + \varepsilon)^{-1} (\tau' - x_1' + \varepsilon)^{-1}\,.$$

L'intégration par rapport aux u situés entre x_1 et x_2 et ceux entre x_3 et τ d'une part, et par rapport aux u' situés entre x_1' et x_2' et ceux entre x_3' et τ d'autre part donne:

$$r^4(\varepsilon,d)\left\|\int_0^T d\tau H_{p,s}H_{p',s'}\right\|^2_{L^2([0,T]^{2(n-1)})}$$
$$= c\varepsilon^2 \int_{\Delta_{8,T}} d\tau d\tau' dx_1 dx_2 dx_3 dx_1' dx_2' dx_3' (x_2 - x_1)^{p-2} (x_2' - x_1')^{p'-2} (\tau - x_3)^{s-2}$$
$$\times (\tau - x_3')^{s'-2} (x_2 - x_1 + \varepsilon)^{1-p} (x_2' - x_1' + \varepsilon)^{1-p'} (\tau - x_3 + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}}$$
$$\times (\tau - x_3' + \varepsilon)^{\frac{1-s'}{2}} (\tau' - x_3 + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}} (\tau' - x_3' + \varepsilon)^{\frac{1-s'}{2}} (\tau - x_1 + \varepsilon)^{-1}$$
$$\times (\tau - x_1' + \varepsilon)^{-1} (\tau' - x_1 + \varepsilon)^{-1} (\tau' - x_1' + \varepsilon)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= c\varepsilon^2 \int_{\Delta_{8,T}} d\tau d\tau' dx_1 dx_2 dx_3 dx_1' dx_2' dx_3' (\tau - x_3 + \varepsilon)^{\frac{s-3}{2}} (\tau' - x_3 + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}} \\
&\quad \times (\tau - x_3' + \varepsilon)^{\frac{s'-3}{2}} (\tau' - x_3' + \varepsilon)^{\frac{1-s'}{2}} (x_2 - x_1 + \varepsilon)^{-1} (x_2' - x_1' + \varepsilon)^{-1} \\
&\quad \times (\tau - x_1 + \varepsilon)^{-1} (\tau - x_1' + \varepsilon)^{-1} (\tau' - x_1 + \varepsilon)^{-1} (\tau' - x_1' + \varepsilon)^{-1} \\
&\leq c\varepsilon^2 \int_{\Delta_{8,T}} d\tau d\tau' dx_1 dx_2 dx_3 dx_1' dx_2' dx_3' (\tau - x_3 + \varepsilon)^{-1} (\tau - x_3' + \varepsilon)^{-1} \\
&\quad \times (x_2 - x_1 + \varepsilon)^{-1} (x_2' - x_1' + \varepsilon)^{-1} (\tau - x_1 + \varepsilon)^{-1} (\tau - x_1' + \varepsilon)^{-1} \\
&\quad \times (\tau' - x_1 + \varepsilon)^{-1} (\tau' - x_1' + \varepsilon)^{-1}
\end{aligned}
$$

avec:

$$
\Delta_{8,T} = \{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \tau, 0 \leq x_1' \leq x_2' \leq x_3' \leq \tau, \tau \leq \tau' \leq T\} .
$$

Vu que les intégrales ne divergent plus que logarithmiquement, le facteur de ε^2 suffit pour produire la convergence vers zéro. Pour les autres cas particuliers de $H_{p,s}H_{p',s}$, un calcul analogue á celui effectué dans les cas pécédents prouve que: $r^4 \|G^{(i)}_{2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}-\mathbf{k})}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2(n-k-1)})} \to_{\varepsilon\to 0} 0$. Alors, grâce á la Proposition 2, et le lemme pécédent on prouve la proposition suivante:

Proposition 4. *Dans $L^2(\mathbb{R}^{2n-2})$ on a:*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p,p'} c_{\mathbf{ps}} c_{\mathbf{p's'}} (2n_i)^2 \langle rM_i, rM_k \rangle_T = C_{i,\mathbf{n}} T \tag{5.14}
$$

où $C_{i,\mathbf{n}} > 0$ est une constante positive.

5.2. *Démonstration du théorème 3*

Proposition 5. *On a, uniformément pour tout T fini:*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2d-5} \|g_{ps}(x_1, x_2, x_3, T) 1_{E_\mathbf{p}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \,, \tag{5.15}
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2d-5} \|g_{ps}(0, x_2, x_3, x_4) 1_{E_\mathbf{p}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \,, \tag{5.16}
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2d-5} \|g_{ps}(0, x_2, x_3, T) 1_{E_\mathbf{p}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \,. \tag{5.17}
$$

Démonstration: La preuve est une conséquence directe du Lemme 8. En effet, comme on a:

$$
r(\varepsilon, d) g^{(d)}_{ps}(x_1, x_2, x_3, T) \leq \sqrt{\varepsilon} (x_2 - x_1 + \varepsilon)^{\frac{1-p}{2}} (T - x_3 + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}} (T - x_1 + \varepsilon)^{-1}
$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
&r^2(\varepsilon,d)\|g_{ps}^{(d)}(x_1,x_2,x_3,T)1_{E_{\mathbf{p}}}\|^2_{L^2([0,T]^n)}\\
&\quad = r^2(\varepsilon,d)\int_0^T d^n u 1_{\{x_2(u)\le x_3(u)\}}(u) g_{ps}^2(x_1(u),x_2(u),x_3(u),T)\\
&\quad = cr^2(\varepsilon,d)\int_{0\le x_1\le x_2\le x_3\le T}(x_2-x_1)^{p-2}(T-x_3)^{s-1}g_{ps}^2(x_1(u),x_2(u),x_3(u),T)d^3x\\
&\quad \le c\varepsilon\int(x_2-x_1+\varepsilon)^{-1}(T-x_1+\varepsilon)^{-2}dx_1dx_2dx_3 \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

Les autres limites se calculent de la mme manière. La limite (5.14) est la covariance quadratique á une constante prés d'un mouvement brownien. Le Théorème 2 est en fait une conséquence du Théorème VIII.3.11 de Ref. 19. En effet, comme $rM_{i,T}$, $i=1,\dots,d$, sont des martingales continues, alors il suffit de prouver la convergence en probabilité des covariances quadratiques.

Afin de contrôler les autres termes du développement chaotique du temps local des intersections triples, on montre d'après (5.15)–(5.17) que:

$$r^2\|N_T(\boldsymbol{\omega})\|^2_{(L^2)}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5.18}$$

On établit ainsi le lemme suivant:

Lemme 6. *Dans* $L^2(\mathbb{R}^{2n-2})$ *on a:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(\varepsilon)N_T = 0\,.$$

En fait, la convergence est uniforme sur tout intervalle borné de $[0,T]$. On montre aussi le lemme suivant:

Lemme 7. *Les processus* $\{r(\varepsilon)N_T:\varepsilon>0\}$, $\{r(\varepsilon)M_T:\varepsilon>0\}$ *et leurs combinaisons lin éaires sont tendus.*

Il s'agit de vérifier le critère suivant pour le processus $M_T : \forall\ \alpha>0$, il existe β, $c_T>0$ tels que:

$$\sup_{\varepsilon>0} E|rM_t - rM_{t'}|^\alpha \le c_T(t-t')^{1+\beta} \tag{5.19}$$

$\forall\ T>0$ et $0\le t'<t\le T$ (voir[20]).

On montre d'abord ce résultat dans le cas particulier où $\alpha=2$.

Comme on a:

$$M_t = \sum_{\mathbf{p+s=n}} c_{\mathbf{ps}}\langle g_{ps}(x_1,x_2,x_3,x_4)1_{E_{\mathbf{p}}}1_{[0,t]}(x_4), :\boldsymbol{\omega}^{\otimes\mathbf{2n}}:\rangle$$

alors:

$$M_t - M_{t'} = \sum_{\mathbf{p+s=n}} c_{\mathbf{ps}}\langle g_{ps}(x_1,x_2,x_3,x_4)1_{E_{\mathbf{p}}}1_{[t',t]}(x_4), :\boldsymbol{\omega}^{\otimes\mathbf{2n}}:\rangle$$

et on a

$$E|rM_t - rM_{t'}|^2 \le c_{\mathbf{n}} r^2 \left\| \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} c_{ps} g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) 1_{E_{\mathbf{p}}} 1_{[t',t]}(x_4) \right\|^2$$

$$\le c_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} |c_{\mathbf{ps}}|^2 \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} \|g_{ps}(1_{E_{\mathbf{p}}} 1_{[t',t]})(x_4)\|^2 .$$

En utilisant le Lemme 8, on obtient alors:

$$E|rM_t - rM_{t'}|^2 \le c_{\mathbf{n}} \varepsilon \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} |c_{\mathbf{ps}}|^2 \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} \int_{t'}^{t} dx_4 \int_0^{x_4} dx_3 \int_0^{x_3} dx_2 \int_0^{x_2} dx_1$$

$$\times (x_2 - x_1 + \varepsilon)^{-1} (x_4 - x_1 + \varepsilon)^{-2} (x_4 - x_3 + \varepsilon)^{-1} .$$

En faisant le changement de variables suivant:

$$x_2 - x_1 = u ,$$
$$x_3 - x_2 = v ,$$
$$x_4 - x_3 = w ,$$
$$x_4 = x_4 ,$$

on obtient:

$$E|rM_t - rM_{t'}|^2 \le \varepsilon C_1 \int_{t'}^{t} dx_4 \int_0^{x_4} dw (w+\varepsilon)^{-1} \int_0^{x_4 - w}$$

$$\times dv (u + v + w + \varepsilon)^{-2} \int_0^{x_4 - w - v} du (u+\varepsilon)^{-1} ,$$

d'où:

$$E(M_t - M_{t'})^2 \le \varepsilon C_2 \int_{t'}^{t} dx_4 \int_0^{x_4/\varepsilon} dw (w+1)^{-\frac{4}{3}} \int_0^{(x_4 - w)/\varepsilon}$$

$$\times dv (v+1)^{-\frac{4}{3}} \int_0^{(x_4 - w - v)/\varepsilon} du (u+1)^{-\frac{4}{3}} .$$

Enfin, on obtient:

$$\sup_{\varepsilon > 0} E(rM_t - rM_{t'})^2 \le c_T (t - t') . \tag{5.20}$$

En utilisant la propriété de l'hypercontractivité du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, voir (p. 235 Ref. 17), pour tout $\varphi \in (L^2)$ et pour tout $\alpha > 2$, il existe alors une constante $c_{\mathbf{n},\boldsymbol{\alpha}} > 0$ telle que:

$$\|\varphi\|_\alpha^\alpha \le c_{\mathbf{n},\alpha} \|\varphi\|_2^\alpha . \tag{5.21}$$

En prenant $\varphi = rM_t - rM_{t'}$, et en utilisant l'estimation (5.21), on obtient

$$E(rM_t - rM_{t'})^\alpha \le c_T (t - t')^{\alpha/2} .$$

Ainsi le critère est établi. Le même raisonnement est valable pour rN_T et pour toute combinaison linéaire de rN_T et rM_T. Sachant que le processus rK_T est tendu d'après le Lemme 4, que d'une part rM_T converge en loi lorsque $\varepsilon \to 0$, et d'autre part rN_T tend vers 0 en moyenne quadratique, alors en appliquant le procédé de Cramer–Wold (voir p. 61 Ref. 20), pour la convergence en dimension finie de K_T, le processus rK_T converge en loi.

Appendice

Pour estimer les normes L^2 des fonctions tels que $g_{ps}(x_1, x_2, x_3, T)$, $g_{ps}(0, x_2, x_3, x_4)$, et $g_{ps}(0, x_2, x_3, T)$, on établit les propriétés utiles de g_{ps} dans le lemme suivant.

Lemme 8. *Pour des entiers $d \geq 3$, p, $s > 0$, et $\varepsilon > 0$, la fonction g_{ps} définie pour $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, par:*

$$g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{x_2}^{x_3} (t - x_1 + \varepsilon)^{1-\frac{p+d}{2}} (x_4 - t + \varepsilon)^{1-\frac{s+d}{2}} dt$$

vérifie:

$$r(\varepsilon) g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq \varepsilon^{1/2} (x_2 - x_1 + \varepsilon)^{\frac{1-p}{2}} (x_4 - x_3 + \varepsilon)^{\frac{1-s}{2}} (x_4 - x_1 + \varepsilon)^{-1} .$$

Démonstration: On vérifie

$$\begin{aligned} r(\varepsilon) g_{ps}(x_1, x_2, x_3, x_4) &\leq \varepsilon^{1/2} g_{ps}^{(d=3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\leq \varepsilon^{1/2} g_{22}^{(d=3)}(x_1, x_2, x_3, x_4)(x_2 - x_1 + \varepsilon)^{1-\frac{p}{2}} (x_4 - x_3 + \varepsilon)^{1-\frac{s}{2}} . \end{aligned}$$

Posons: $a = x_2 - x_1$, $b = x_3 - x_2$, et $c = x_4 - x_3$

$$\begin{aligned} g_{22}^{(d=3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \int_{x_2}^{x_3} (t - x_1 + \varepsilon)^{-3/2} (x_4 - t + \varepsilon)^{-3/2} dt \\ &= \int_{a}^{a+b} (t + \varepsilon)^{-3/2} (a + b + c - t + \varepsilon)^{-3/2} dt \\ &= \frac{2}{(a + b + c + 2\varepsilon)^2} \\ &\quad \times \left(\frac{b + c - a}{\sqrt{(a + \varepsilon)}\sqrt{(b + c + \varepsilon)}} + \frac{b + a - c}{\sqrt{(c + \varepsilon)}\sqrt{(b + a + \varepsilon)}} \right) \\ &\leq \frac{2}{(a + b + c + 2\varepsilon)^2} \left(\frac{b + c}{\sqrt{(a + \varepsilon)}\sqrt{(b + c + \varepsilon)}} + \frac{a + b}{\sqrt{(a + b + \varepsilon)}} \right) \\ &\leq \frac{2}{(a + b + c + 2\varepsilon)^2} \left(\sqrt{\frac{b + c + \varepsilon}{a + \varepsilon}} + \sqrt{\frac{a + b + \varepsilon}{c + \varepsilon}} \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{(a+b+c+2\varepsilon)^{3/2}}((a+\varepsilon)^{-1/2}+(c+\varepsilon)^{-1/2})$$

$$\leq \frac{4}{\sqrt{(a+\varepsilon)}(a+b+c+\varepsilon)\sqrt{(c+\varepsilon)}}.$$

La substitution donne le resultat du lemme.

Acknowledgments

We would like to express our deep gratitude to Prof. M. de Faria for her continuous assistance during our stay at Funchal. We are grateful to the following institutions: Bielefeld University, CCM of Madeira and Tunis University for supporting this work. Support from FCT, POCTI 219, FEDER, is gratefully acknowledged.

References

1. S. Albeverio, M. J. Oliveira and L. Streit, Intersection local times of independent Brownian motions as generalized white noise functionals.
2. R. Bass and D. Khoshnevisan, Intersection local times and Tanaka formulas, *Ann. Poincaré* **29** (1993) 419–451.
3. Th. Deck, J. Potthoff and G. Våge, A review of white noise analysis from a probabilistic standpoint, *Acta Appl. Math.* **48** (1997) 91–112.
4. A. Dvoretzky, P. Erdös and S. Kakutani, Double points of paths of Brownian motion in the plane, *Bull. Res. Council Israel Sect. F* **3** (1954) 364–371.
5. A. Dvoretzky, P. Erdös and S. Kakutani, Double points of paths of Brownian motion in n-space, *Acta Sci. Math. Szeged* **12** (1950) 75–81.
6. A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani and S. J. Taylor, Triple points of the Brownian motion in 3-space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957) 856–862.
7. E. B. Dynkin, Polynomials of the occupation field and related random fields, *J. Funct. Anal.* **58** (1984) 20–52.
8. E. B. Dynkin, Self-intersection gauge from random walks and for Brownian motion, *Ann. Prob.* **16** (1988) 1–57.
9. E. B. Dynkin, Regularized self-intersection local times of planar Brownian motion, *Ann. Prob.* **16** (1988) 58–73.
10. M. De Faria, C. Drumond and L. Streit, The renormalization of self intersection local times I, *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics* **3** (2000) 223–236.
11. M. De Faria, T. Hida, L. Streit and H. Watanabe, Intersection local times as generalized white noise functionals, *Acta Appl. Math.* **46** (1997) 351–362.
12. M. De Faria, M. J. Oliveira and L. Streit, A generalized Clark–Ocone formula, *Random Oper. Stoch. Eq.* **8** (2000) 163–174.
13. R. Jenane-Gannoun, R. Hachaichi, H. Ouerdiane and A. Rezgui, Un théorème de dualité entre espaces de fonctions holomorphes á croissance exponentielle, *J. Funct. Anal.* **171** (2000) 1–14.
14. D. Geman, J. Horowitz and J. Rosen, A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane, *Ann. Prob.* **12** (1980) 86–107.
15. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryshik, *Table of Integrals, Series, and Products*, corrected and enlarged edn. (Academic Press, 1980).
16. T. Hida, *Brownian Motion* (Springer, 1980).

17. T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit, *White Noise — An Infinite Dimensional Calculus* (Kluwer-Academic, 1993).
18. P. Imkeller, V. Perez-Abreu and J. Vives, Chaos expansions of double intersection local times of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization, *Stoch. Proc. Appl.* **56** (1995) 1–34.
19. J. Jacod and A. N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes* (Springer, 1987).
20. I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (Springer, 1991).
21. Yu. Kondratiev, P. Leukert, J. Potthoff, L. Streit and W. Westerkamp, Generalized functionals in Gaussian spaces: the characterization theorem revisited, *J. Funct. Anal.* **141** (1996) 301–318.
22. T. Kuna and L. Streit, A note on the representation of conditional expectations for non-Gaussian noise, submitted to *Stoch. Processes Appl.*, U. Madeira preprint Nr. 75/03.
23. J. F. Le Gall, Sur le temps d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan, Seminaire de Proba. XIX, 1983/84, in Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123 (Springer, 1985), pp. 314–331.
24. J. F. Le Gall, Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien, *Ann. Probab.* **14** (1986) 1219–1244.
25. P. Lévy, Le mouvement brownien plan, *Amer. J. Math.* **62** (1940) 440–487.
26. T. J. Lyons, The critical dimension at which quasi-every Brownian motions self avoiding, *Adv. Appl. Probab.* (*Spec. Suppl.*) (1986) 87–99.
27. S. Mendonça and L. Streit, Multiple intersection local times in terms of white noise, *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics* **4** (2001) 533–543.
28. D. Nualart and J. Vives, Smoothness of Brownian local times and related functionals, *Potential Anal.* **1** (1992) 257–263.
29. D. Nualart and J. Vives, Chaos expansion and local times, *Publ. Math.* **36** (1992) 827–836.
30. D. Nualart and J. Vives, Smoothness of local times and related Wiener functionals, in *Chaos Expansions, Multiple Wiener — Ito Integrals and Their Applications*, eds. C. Houdré and V. Pérez-Abreu (CRC Press, 1994).
31. M. D. Penrose, On the existence for quasi-every Brownian path in space, *Ann. Probab.* **17** (1989) 482–502.
32. V. Pérez-Abreu, Chaos expansions: A review, CIMAT preprint, 1993.
33. J. Rosen, A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space, *Comm. Math. Phys.* **88** (1983) 327–338.
34. J. Rosen, Tanaka's formula and remormalisation for intersection of planar Brownian motion, *Ann. Probab.* **14** (1986) 1425–1451.
35. J. Rosen, A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. Séminaire de Proba. XX, 1984/85, in Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1204 (Spinger, 1986), pp. 515–531.
36. N. R. Shieh, White noise and Tanaka formula for intersections of planar Brownian motion, *Nagoya Math J.* **122** (1991) 1–17.
37. L. Streit and W. Westerkamp, A generalization of the characterization theorem for generalized functionals of white noise, in *Dynamics of Complex and Irregular Systems*, eds. Ph. Blanchard *et al.* (World Scientific, 1993).
38. K. Symanzik, Euclidean quantum field theory, in *Local Quantum Field Theory*, ed. R. Jost (Academic Press, 1969).

39. S. R. S. Varadhan, Appendix to Euclidean quantum field theory, in *Local Quantum Field Theory*, ed. R. Jost (Academic Press, 1969).
40. H. Watanabe, The local time of self-intersections of Brownian motions as generalized Brownian functionals, *Lett. Math. Phys.* **23** (1991) 1–9.
41. W. Werner, Sur les singularités des temps locaux d'intersection du mouvement brownien plan, *Ann. l' Institut H-Poincaré* **29** (1993) 391–418.
42. J. Westwater, On Edward's model for long polymer chains, *Comm. Math. Phys.* **72** (1980) 131–174.
43. R. Wolpert, Wiener path intersection and local time, *J. Funct. Anal.* **30** (1978) 329–340.
44. M. Yor, Compléments aux formules de Tanaka–Rosen, Séminaire de Probabilité. XIX, 1983/84, in Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123 (Springer, 1985), pp. 332–348.
45. M. Yor, Renormalisation et convergence en loi sur les temps locaux des intersections du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$, Séminaire de probabilité, 1983/84, in Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123 (Springer, 1985), pp. 350–365.