

“Séries Temporais para a Análise de Estrelas Variáveis”

(Projecto PESO/ P/ PRO/ 40152/ 2000)

Joana Andrade, Pedro Augusto, Ivan Andronov
Departamento de Matemática, Universidade da Madeira

ÍNDICE

1	ESTRELAS VARIÁVEIS	3
1.1	Características espectrais das estrelas	3
1.1.1	Classes espectrais	3
1.1.2	Peculiaridades	6
1.1.3	Classes de luminosidade	6
1.2	Classificação das estrelas variáveis	8
1.2.1	Variáveis eruptivas	8
1.2.2	Variáveis pulsantes	10
1.2.3	Variáveis rotacionais	14
1.2.4	Variáveis cataclísmicas (explosivas e tipo-Novas)	15
1.2.5	Variáveis eclipsantes	18
1.2.6	Variáveis fontes de raios-x	20
2	ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS	22
2.1	Metodologia geral	22
2.1.1	Técnicas de diagnóstico e pré-processamento	24
2.1.2	Medidas de performance e optimização	26
2.1.3	Estimação de parâmetros dum modelo	27
2.2	Modelos matemáticos	28
2.2.1	Análise no domínio do tempo	28
2.2.2	Análise no domínio das frequências	29
2.2.2.1	Análise de Fourier	29
2.2.2.2	Análise de ondas	34
2.2.3	Métodos de Alisamento por Aproximação Local	39
2.2.4	Métodos não paramétricos	42
2.3	Sumário dos métodos apresentados	44
3	BREVE INTRODUÇÃO AO PROJECTO	48
	BIBLIOGRAFIA:	49
	REFERÊNCIAS:	49

1 Estrelas variáveis

As estrelas variáveis são estrelas que variam de brilho/magnitude ao longo do tempo, de forma periódica ou não. A variação deve-se a causas intrínsecas, isto é, concernentes à sua própria estrutura física tais como expansão e contracção das suas camadas externas, erupções, explosões, ou a causas extrínsecas como eclipses em sistemas estelares binários.

1.1 Características espectrais das estrelas

1.1.1 Classes espectrais

A classe espectral duma estrela é baseada na presença de linhas de emissão ou de absorção, mais ou menos intensas, no espectro entre os comprimentos de onda de cerca de 350 nm até os 500 nm e é uma classificação em termos da temperatura das camadas superficiais das estrelas. Os principais sete grupos são por ordem decrescente de temperatura

$$O - B - A - F - G - K - M .$$

Cada uma destas classes é subdividida em dez pela introdução dos algarismos 0 ... 9.

O Sol com uma temperatura de cerca de 5 700 K é do tipo espectral G2.

Mais recentemente foram adicionadas algumas subclasses, nomeadamente, O9.5 entre O9 e B0, B0.5 e B9.5; algumas das subclasses quase nunca foram utilizadas, e.g. K6, K7, K8 e K9 e algumas subclasses entraram em desuso, e.g. B4, B6, B9, A1, A4, A6, A8, A9, F1, F4, F6, G1, G3, G4, G6, G7, G9, K1, M5 e M6.

As estrelas mais quentes até agora descobertas são classificadas neste sistema como estrelas do tipo espectral O4 tendo uma temperatura de cerca de 40 000 K e as estrelas mais frias são estrelas do tipo espectral M8 com temperaturas de cerca de 2 500 K. Existem estrelas mais quentes do que as estrelas O4; em particular as anãs brancas podem ter temperaturas de 100 000 K, mas a pressão na superfície é tão alta que poucas ou nenhuma linhas espectrais conseguem ser detectadas e portanto, estas não podem ser classificadas através deste sistema.

Existem também estrelas mais frias que as estrelas de tipo espectral M8, nomeadamente as anãs vermelhas L, T e as chamadas anãs castanhas que são objectos de transição entre as mais pequenas estrelas e os maiores planetas. As anãs vermelhas L e T foram descobertas no final da década de 90 e foram classificadas por Kirkpatrick et al (1999) e por Burgasser et al (1999) respectivamente. Esta descoberta levou à extensão do sistema de classificação, com as novas classes espectrais L e T sucedendo as classes referidas anteriormente, isto é,

$$O - B - A - F - G - K - M - L - T .$$

Estas novas classes espectrais são também divididas em dez subclasses pela introdução dos algarismos 0 ... 9. Algumas anãs vermelhas descobertas recentemente foram classificadas em subclasses intermédias, nomeadamente L0.5, L2.5, L3.5 e L5.5.

A razão porque as linhas no espectro variam com a temperatura é devido ao balanço existente entre a ionização e a excitação dos átomos que constituem as camadas superficiais das estrelas. As linhas dos átomos no seu estado fundamental são mais fortes para temperaturas mais baixas e diminuem de intensidade com o aumento de

temperatura pois alguns destes átomos são excitados para níveis de energia mais altos ou são ionizados, sendo portanto menor o número de átomos que produzem estas linhas. Pelo contrário, as linhas provenientes de átomos excitados serão fracas para temperaturas baixas pois poucos átomos estarão nessas condições e aumentarão de intensidade com o aumento de temperatura. As linhas provenientes da ionização eventualmente irão diminuir de intensidade ao serem atingidas temperaturas bastante altas pois muitos átomos serão levados para níveis superiores de ionização.

A classificação espectral é pela análise de intensidades relativas, isto é, para cada tipo espectral são escolhidos dois átomos ou íons de naturezas diferentes de maneira a que uma das linhas aumente de intensidade com o aumento da temperatura e a outra diminua.

A aparência do espectro é então dominada por algumas linhas fortes que variam lentamente consoante as classes espectrais. As principais linhas em cada uma destas classes são agora descritas:

Classe O – Apresentam linhas fortes de átomos várias vezes ionizados, nomeadamente Si IV, N III e He II. São as estrelas mais azuis cujas temperaturas na superfície são superiores a 25 000 K.

Classe B – Apresentam linhas intensas de He, ausência de Hélio ionizado, linhas íons de silício e azoto com níveis de ionização inferiores do que na classe anterior; as linhas de Balmer tornam-se mais fortes. São estrelas azuis com temperaturas na superfície entre os 11 000 e os 25 000 K.

Classe A – As linhas de Balmer atingem a intensidade máxima em A0; surgem linhas de íons de Cálcio e de vários metais. São estrelas azuis com temperaturas na superfície entre os 7 500 e os 11 000 K.

Classe F – As linhas de Balmer e dos metais ionizados tornam-se mais fracas; as linhas de metais no seu estado fundamental tornam-se mais fortes. São estrelas azuis – brancas cujas temperaturas na superfície estão entre os 6 000 e os 7 500 K.

Classe G – As linhas de Balmer continuam a diminuir de intensidade; as linhas de íons de Cálcio atingem a intensidade máxima; as linhas de metais neutros continuam a aumentar de intensidade. São estrelas brancas – amarelas com temperaturas à superfície entre os 5 000 e os 6 000 K.

Classe K – O espectro é dominado por linhas de metais neutros. As bandas moleculares de TiO começam a ser visíveis. São estrelas laranja – vermelhas com temperaturas na superfície entre os 3 500 e os 5 000 K.

Classe M – Dominam as bandas moleculares de TiO. São estrelas vermelhas cujas temperaturas na superfície estão entre os 3 500 K e cerca de 2 000 K.

Classe L – As bandas moleculares de TiO e VO são fracas ou ausentes. Apresentam linhas fortes de vários óxidos metálicos tais como CrH, FeH e CaH, de H₂O e dos metais alcalinos Na, K, Rb, Cs e ocasionalmente de Li. São anãs vermelhas com temperaturas superficiais entre cerca de 2 000 K e cerca de 1 400 K.

Classe T – Dominam as linhas de metano (CH₄). Têm também linhas de H₂O. São anãs vermelhas com temperaturas na superfície inferiores a cerca de 1 400 K.

As estrelas das classes O, B e A dizem-se de tipo recente (*early*) enquanto que as estrelas das restantes classes dizem-se de tipo tardio (*late*).

Após ter sido determinado o tipo espectral duma estrela da sequência principal, podemos determinar com alguma precisão a sua temperatura, raio, massa e luminosidade.

Para além destas classes espectrais principais, existem outras classes também importantes com os símbolos

$$R - N - S - W - P - Q$$

em que por vezes as classes R e N são combinadas numa classe C. Presentemente as classes P (nebulosas) e Q (novas e supernovas) já não são utilizadas.

As estrelas Wolf-Rayet que constituem a **classe W**, têm espectros com amplas linhas de emissão, por vezes com linhas de absorção em comprimentos de onda pequenos. As suas temperaturas superficiais são análogas às das estrelas da classe espectral O, mas as linhas de Hidrogénio não são tão abundantes e em compensação as linhas de Hélio são muito intensas. Existem duas subclasses, a **subclasse WN** onde as linhas de Azoto são bastante fortes e a **subclasse WC** onde as linhas de Carbono e de Oxigénio são bastante fortes. Cada uma destas subclasses é subdividida atendendo à temperatura da estrela, acrescentando os algarismos 0 ... 9 ao símbolo da subclasse.

As estrelas **Of** têm composição intermédia à das estrelas das classes O e W. Estas apresentam linhas de emissão de iões de Hélio nos 468.6 nm e de Azoto duplamente ionizado nos comprimentos de onda 463.0 – 463.4 nm.

As estrelas que pertencem às **classes R e N** têm temperaturas análogas às estrelas das classes G e K. Estas são estrelas gigantes variáveis com bandas moleculares fortes de CN e de C₂ no seu espectro. A designação alternativa, **classe C**, deve-se às grandes quantidades de carbono presentes.

As estrelas da **classe S** têm temperaturas semelhantes às estrelas das classes K e N. Têm bandas moleculares fortes de ZrO no espectro e as bandas de TiO são fracas ou ausentes.

As classes C e S dividem-se em várias subclasses com duas componentes decimais separadas por uma vírgula (e.g., a estrela HD 53432 é da subclasse espectral C4,5) onde o primeiro algarismo corresponde à variação da temperatura dentro da classe e o segundo algarismo dá indicação do grau de intensidade das peculiaridades que definem a classe.

Nas **anãs brancas**, as linhas espectrais são difusas demais para a sua classificação pelo procedimento descrito; com efeito, em algumas destas estrelas as linhas misturam-se e o seu espectro é próximo do espectro contínuo. Assim, estas estrelas são classificadas com base nas suas abundâncias aparentes. Temos então os tipos:

DA – anãs brancas ricas em Hidrogénio.

DB – anãs brancas ricas em Hélio.

DC (ou BC) – anãs brancas nas quais não são detectadas linhas (o espectro é contínuo).

DO – anãs brancas com linhas fortes de iões de Hélio.

DQ – anãs brancas ricas em Carbono.

DZ – anãs brancas onde são apenas detectadas linhas de elementos metálicos.

1.1.2 Peculiaridades

Características especiais observadas no espectro estelar podem ser indicadas em letras minúsculas antes ou depois do tipo espectral. Os principais símbolos utilizados são:

Sufixos:

e – Estão presentes linhas de emissão no espectro. Se estas incluem linhas de Hidrogénio, a série de Balmer é percorrida desde $H\alpha$ até comprimentos de onda inferiores, e a última linha visível no espectro pode ser indicada após o símbolo “e” pela letra grega correspondente (e.g. $B\delta e\gamma$; neste caso a última linha observada da série de Balmer é $H\gamma$).

f – Este símbolo é usado apenas para estrelas com natureza intermédia entre a classe espectral O e as estrelas Wolf-Rayet.

k – Existem linhas de matéria interestelar no espectro.

m – As linhas dos metais presentes são anormalmente fortes.

n – As linhas são bastante difusas. Quanto este facto se deve à pressão estas estrelas podem ser subanãs ou anãs brancas (ver prefixos abaixo).

p, pec – Este símbolo é utilizado quando a peculiaridade observada não é abrangida por outro símbolo.

s – Linhas anormalmente finas, embora normalmente não sejam tão finas como as linhas das supergigantes.

v – Este símbolo é utilizado no caso do espectro ser variável.

Prefixos:

c, sg – As linhas espectrais são muito finas (geralmente mais finas do que nos casos em que é utilizado o símbolo “s”); a estrela é uma supergigante.

d – A estrela é uma anã ou pertence à sequência principal.

g – A estrela é uma gigante.

sd – A estrela é uma subanã.

w, wd, D – A estrela é uma anã branca.

1.1.3 Classes de luminosidade

A pressão é o factor que mais contribui no alargamento das linhas espectrais. Temos que quanto maior a pressão mais largas são as linhas do espectro.

A maioria das massas estelares têm entre 0.25 e 20 M_{\odot} mas têm raios de 0.01 a 1 000 R_{\odot} . Assim a densidade média das estrelas é de 10^{-8} a $10^6 \rho_{\odot}$, verificando-se que quanto menor a estrela maior a sua densidade. Assim, quanto menor for a estrela, maior será a pressão nas camadas superficiais da estrela e conseqüentemente as linhas espectrais serão mais largas (portanto, difusas). Assim as estrelas maiores são mais brilhantes e quanto maior a largura das linhas no espectro menos brilhantes são as estrelas. Esta é a base da classificação das estrelas em classes de luminosidade, onde visualmente são comparadas as intensidades relativas entre um dado par de linhas no espectro (Kitchin, 1995).

Por ordem crescente de luminosidade, temos as classes:

I, Ia, Iab, Ib – supergigantes (por vezes é utilizada a classe 0 para as estrelas excepcionalmente grandes e brilhantes).

II – gigantes luminosas

II-III, IIIa, IIIb, IIIab, IIIb, III-IV – gigantes

IV – subgigantes

V – estrelas da sequência principal / anãs

VI – subanãs

VII- anãs brancas

O alargamento das linhas espectrais atinge o seu máximo nas estrelas de neutrões. Contudo, muito poucas estrelas deste tipo são detectáveis no óptico e portanto estas estrelas não são incluídas neste sistema de classificação. Assim as anãs brancas são as estrelas mais densas às quais é atribuída uma classe de luminosidade.

1.2 Classificação das estrelas variáveis

O Catálogo Geral de Estrelas Variáveis (GCVS; Kholopov et al, 1985) agrupa as estrelas variáveis em seis classes principais:

1. eruptivas (BE, FU, GCAS, I, IA, IB, IN, INA, INB, INT, IT, IN(YY), IS, ISA, ISB, RCB, RS, SDOR, UV, UVN, WR),
2. pulsantes (ACYG, AM, BCEP, BCEPS, BLBOO, CEP, CEP(B), CW, CWA, CWB, DCEP, DCEPS, DSCT, DSCTC, L, LB, LBV, LC, M, PVTEL, RR, RR(B), RRAB, RRC, RV, RVA, RVB, SR, SRA, SRB, SRC, SRD, SXPHE, ZZ, ZZA, ZZB, ZZO),
3. rotacionais (ACV, ACVO, BY, ELL, FKCOM, PSR, R, SXARI),
4. cataclísmicas (N, NA, NB, NC, NL, NR, SN, SNI, SNII, UG, UGSS, UGSU, UGZ, ZAND),
5. eclipsantes (AR, D, DM, DS, DW, E, EA, EB, EW, GS, K, KE, KW, PN, RS, SD, WD, WR),
6. fontes intensas de raios-X (X, XB, XF, XI, XJ, XND, XNG, XP, XPR, XPRM, XM).

Cada classe engloba vários tipos distintos, de acordo com características comuns, como por exemplo variações de brilho semelhantes (períodos ou amplitudes semelhantes) ou características espectrais. No entanto, um objecto pode ser variável devido a uma combinação de razões, por isso se uma variável pertence a vários tipos de variabilidade, os tipos juntam-se com o sinal “+”.

No catálogo GCVS são ainda usados os símbolos:

L. Estrelas que ainda não foram estudadas mas que denotam mudanças lentas de luminosidade.

S. Estrelas que ainda não foram estudadas mas que denotam mudanças rápidas de luminosidade.

*****. Estrelas variáveis únicas fora do alcance das classificações descritas acima. Estas provavelmente representam curtos estádios de transição dum tipo de variabilidade para outro nas primeiras ou nas últimas etapas de evolução, ou são membros insuficientemente estudados de futuros novos tipos de estrelas variáveis.

As posições de várias classes de estrelas variáveis no diagrama de Hertzsprung-Russell (diagrama H-R) relativamente à sequência principal podem ser visualizadas na figura 1.

1.2.1 Variáveis eruptivas

As variáveis eruptivas são estrelas que variam de brilho em função de violentos processos e erupções que ocorrem nas suas cromosferas ou coroas. As variações de luz são geralmente acompanhadas de “shell events” e perdas de massa sob a forma de ventos estelares de intensidade variável e/ou por interacção com o meio interestelar circundante. Esta classe inclui os seguintes tipos:

BE. Variáveis do tipo espectral *Be* que não podem ser classificadas como variáveis do tipo *GCAS* (ver abaixo). Um número considerável deste tipo de estrelas revelam pequenas variações de brilho que não estão necessariamente relacionadas com “shell events”; em alguns casos as variações são quase periódicas.

FU. Variáveis Orion do tipo *FU Orionis*. São caracterizadas por um aumento gradual da luminosidade em cerca de seis magnitudes ao longo de vários meses, seguido duma estabilidade quase completa durante um grande período de tempo ao atingir o máximo ou

por um lento declínio de uma a duas magnitudes. Ao atingir o máximo os tipos espectrais vão desde *Ae* a *Gpe*. Depois duma explosão há um desenvolvimento gradual do espectro de emissão e há um aumento do tipo espectral. Provavelmente, estas variáveis marcam uma das fases de evolução das variáveis Orion do tipo T Tauri (INT; ver abaixo), pois há evidência de que um membro desta classe, V1057 Cyg, após uma explosão entrou em declínio (2.5 mag em 11 anos) que teve início imediatamente após a luminosidade máxima ter sido atingida. Todas as variáveis deste tipo conhecidas presentemente estão acompanhadas duma nebulosa de reflexão que se assemelha a um cometa.

GCAS. Variáveis eruptivas irregulares do tipo Gama Cas. São estrelas de rotação rápida do tipo espectral *Be* e das classes de luminosidade III e IV. Nestas estrelas há emissão de matéria a partir da zona equatorial, com subsequente formação de discos ou anéis, por vezes acompanhada por enfraquecimento temporário de brilho. As amplitudes podem atingir as 1.5 mag no visível.

I. Variáveis irregulares pouco estudadas com características desconhecidas de variação luminosa e tipos espectrais. É um grupo não-homogêneo de variáveis. Consoante o tipo espectral são designadas por **IA** (do tipo espectral *O-A*) ou **IB** (dos tipos espectrais *F-G* ou *K-M*).

IN. Variáveis tipo Orion. Variáveis irregulares eruptivas associadas a nebulosas difusas, brilhantes ou escuras, ou que foram observadas perto destas. Algumas destas variáveis podem mostrar variações de luz cíclicas causadas por rotação axial. No diagrama espectro-luminosidade, encontram-se na zona da sequência principal ou na zona das subgigantes. São provavelmente objectos jovens, que durante a sua evolução vão-se tornar estrelas de luminosidade constante na zona de idade-zero da sequência principal (ZAMS). A amplitude das variações de luminosidade pode atingir várias magnitudes. No caso da variação de luz ser rápida (até 1 magnitude em 1-10 dias) a letra "S" é adicionada ao símbolo do tipo (**INS**). Este tipo pode ser dividido nos seguintes subtipos: **INA** (dos tipos espectrais *B-A* ou *Ae*; são frequentemente caracterizadas por ocasionais quedas abruptas de luminosidade, típico das variáveis Algol, e.g. a variável T Ori), **INB** (dos tipos espectrais *F-M* ou *Fe-Me*; as estrelas do tipo espectral *F* podem demonstrar quedas de luminosidade típicas das variáveis Algol, de forma análoga a muitas variáveis do subtipo INA; as variáveis dos tipos espectrais *F-M* podem produzir erupções acompanhadas por variações de brilho irregulares) e **IN(Y)** (mostram a presença de componentes de absorção na zona vermelha das linhas de emissão, o que indica que há queda de matéria na superfície da estrela, e.g. a variável YY Ori).

INT (ou IT). Variáveis Orion do tipo T Tauri. São variáveis dos tipos espectrais *Fe-Me*. O espectro das estrelas mais típicas assemelha-se ao espectro da cromosfera solar. A característica específica deste tipo é a presença de linhas de emissão fluorescentes de FeII 4046, 4132 Å (anormalmente intensas no espectro destas estrelas), linhas de emissão de Si II e O I, assim como a linha de absorção de Li I 6707 Å. Geralmente estas variáveis são observadas apenas em nebulosas difusas. Se não é aparente que a estrela esteja associada a uma nebulosa, a letra N no símbolo do tipo é omitida e portanto diz-se que a variável pertence ao tipo IT.

IS. Variáveis irregulares sem conexão aparente com nebulosas difusas que apresentam variações rápidas de luminosidade de cerca de 0.5 - 1.0 mag em várias horas ou dias. Não há uma fronteira rígida entre as variáveis deste tipo e as variáveis do tipo Orion: se uma variável irregular de variação rápida é observada na região duma nebulosa difusa, então é considerada uma variável do tipo Orion e é atribuído o símbolo **INS**. No entanto, para classificar uma variável como sendo do tipo IS, é necessário ter um extremo cuidado e

assegurar que as variações de luminosidade não são realmente periódicas. Na 3ª edição do *GCVS*, um grande número de estrelas foram classificadas erradamente como sendo deste tipo, vindo-se depois a constatar que eram sistemas binários eclipsantes, variáveis do tipo RR Lyrae e até objectos extragalácticos do tipo BL Lac. O tipo IS pode ser dividido em dois subtipos, consoante o tipo espectral das variáveis: **ISA** (dos tipos espectrais *B-A* ou *Ae*) e **ISB** (dos tipos espectrais *F-M* e *Fe-Me*).

RCB. Variáveis do tipo R Coronae Borealis. Estrelas de alta luminosidade, pobres em hidrogénio mas ricas em carbono e hélio. São estrelas dos tipos espectrais *Bpe-R* que são simultaneamente pulsantes e eruptivas. Apresentam, de forma não-periódica, quedas lentas de luminosidade, que vão desde 1 às 9 mag no visível e que duram desde um mês até várias centenas de dias. Estas mudanças sobrepõem pulsações cíclicas com amplitudes que atingem várias décimas de magnitude e períodos entre os 30 e os 100 dias.

RS. Variáveis eruptivas do tipo RS Canum Venaticorum. Este tipo é atribuído a sistemas binários apertados cujo espectro mostra emissão em Ca II, H e K, cujos componentes apresentam actividade cromosférica pronunciada, ocasionando variações de luminosidade quase-periódicas. O período de variação de luz é próximo do período orbital e a amplitude toma valores tão altos como 0.2 no visível. Estas variáveis são também fontes de raios-X e variáveis rotacionais. Também podem ser variáveis eclipsantes, como a própria RS CVn.

SDOR. Variáveis do tipo S Doradus. Estrelas eruptivas, de alta luminosidade, com variações de luminosidade irregulares (por vezes cíclicas) com amplitudes de 1 a 7 mag no visível. Elas são dos tipos espectrais *Bpec-Fpec* e pertencem às estrelas azuis mais brilhantes das suas galáxias. Por regra, estas estrelas estão associadas a nebulosas difusas e rodeadas por invólucros de matéria em expansão, e.g. as variáveis P Cyg e Eta Car.

UV. Variáveis eruptivas do tipo UV Ceti. São estrelas dos tipos espectrais *Ke-Me* da classe de luminosidade V que por vezes mostram actividades eruptivas com amplitudes desde várias décimas até às 6 magnitudes no visível. A amplitude é consideravelmente maior na zona ultravioleta do espectro. A luz máxima é atingida em alguns segundos ou em dúzias de segundos após o começo duma erupção; a estrela retorna à sua luminosidade normal em alguns minutos ou dúzias de minutos.

UVN. Variáveis eruptivas do tipo Orion. São estrelas dos tipos espectrais *Ke-Me* quase idênticas às variáveis do tipo UV Cet situadas na vizinhança do Sol. Para além de estarem relacionadas com nebulosas, são geralmente caracterizadas por terem tipo espectral inferior e maior luminosidade, com desenvolvimento mais lento de erupções. São provavelmente um subgrupo específico das variáveis INB com variações irregulares sobrepostas por erupções.

WR. Variáveis eruptivas do tipo Wolf-Rayet. Estrelas que apresentam largas linhas de emissão de He I, He II, C II - C IV, O II - O IV e N III - N V. Têm mudanças de luz irregulares com amplitudes até as 0.1 magnitudes no visível, que são provavelmente causadas por processos físicos, em particular por ejeções instáveis de massa das suas atmosferas.

1.2.2 Variáveis pulsantes

As variáveis pulsantes são estrelas cujas camadas superficiais se expandem e contraem periodicamente. As pulsações podem ser radiais ou não radiais. Uma estrela com pulsações radiais permanece com forma esférica, enquanto que a forma duma estrela com pulsações não-radiais desvia-se periodicamente duma esfera, podendo acontecer que zonas vizinhas da superfície da estrela tenham fases opostas de pulsação.

Dependendo do valor do período, massa, fase de evolução da estrela e da escala do fenómeno de pulsação, distinguem-se diferentes tipos de variáveis pulsantes:

ACYG. Variáveis do tipo Alpha Cygni. São supergigantes da classe de luminosidade Ia com pulsações não-radiais dos tipos espectrais *Bep-Aep*. As variações de luz, com amplitudes na ordem das 0.1 magnitudes, por vezes parecem irregulares, sendo causadas pela sobreposição de muitas oscilações de períodos próximos. São observados ciclos que vão desde vários dias a várias semanas.

BCEP. Variáveis do tipo Beta Cephei. São estrelas pulsantes dos tipos espectrais *O8-B6* e com classes de luminosidade de I-V cujos períodos de luminosidade e variações de velocidade radial vão desde os 0.1 até os 0.6 dias e cujas amplitudes vão desde as 0.01 às 0.3 mag no visível. As curvas de luz são semelhantes na forma com as curvas de velocidade média radial mas estão separadas em fase por um quarto do período, portanto o máximo de luz corresponde à máxima contração, isto é, ao raio estelar mínimo. A maioria destas estrelas apresentam pulsações radiais, mas existem algumas com pulsação não-radial, e.g. a variável V649 Per; a multiperiodicidade é uma característica de muitas destas estrelas. Dentro deste tipo existe o subtipo **BCEPS** que reúne as variáveis de curto período. Estas variáveis são dos tipos espectrais *B2-B3* e das classes de luminosidade IV-V; os períodos de luminosidade vão de 0.02 - 0.04 dias e as amplitudes de 0.015 - 0.025 mag, isto é, uma ordem de magnitude mais pequena das normalmente observadas.

BLBOO. Variáveis do tipo BL Boo. São também chamadas de Cefeides anómalas; são estrelas com períodos comparativamente longos característicos das variáveis pulsantes do tipo RRAB (ver abaixo) mas consideravelmente mais brilhantes.

CEP. Variáveis Cefeides. Variáveis pulsantes com pulsação radial; são estrelas de alta luminosidade (classes Ib - II), com períodos entre 1 a 135 dias e amplitude no visível de várias centésimas até duas magnitudes (na banda azul, as amplitudes são maiores). O tipo espectral é *F* quando a luz é máxima; no mínimo os tipos espectrais são *G-K*. Quanto maior o período de variação de luz, mais tardio é o tipo espectral. O máximo da velocidade de expansão da superfície quase coincide com o máximo de luz. Existe uma relação directa entre o seu período e a sua magnitude média absoluta de tal forma que são grande indicadores de distâncias galácticas. Tanto o período como a amplitude são extremamente regulares.

CEP(B). Variáveis Cefeides que têm simultaneamente dois ou mais modos de pulsação (normalmente o tom fundamental (primeiro harmónico) com o período P_0 e o primeiro sobretom (segundo harmónico) P_1). Os períodos P_0 vão de 2 a 7 dias e a razão P_1/P_0 é de aproximadamente 0.71.

CW. Variáveis pulsantes do tipo W Vir. Pertencem à população que constitui a componente esférica da galáxia (disco antigo); têm períodos de aproximadamente 0.8 a 35 dias e amplitudes de 0.3 a 1.2 mag no visível. Obedecem a uma relação de período-luminosidade diferente da relação válida para as variáveis do tipo Delta Cefeides (DCEP; ver abaixo). Para um período de igual valor, as variáveis do tipo W Vir são 0.7 - 2 mag menos brilhantes que as variáveis Delta Cep. As curvas de luz das variáveis W Vir para alguns intervalos de período diferem das curvas das variáveis Delta Cep para os períodos correspondentes, nas amplitudes ou pela presença de picos nos ramos descendentes da curva que por vezes tornam-se numa linha de declive zero onde é atingida a luminosidade máxima. Estas variáveis estão presentes em enxames globulares e em latitudes galácticas elevadas. Podem ser separadas nos subtipos **CWA** e **CWB** consoante têm períodos maiores ou menores do que 8 dias, respectivamente.

DCEP. Cefeides clássicas ou variáveis do tipo Delta Cep. São estrelas comparativamente jovens que deixaram a sequência principal e que evoluíram para a faixa de instabilidade no diagrama H-R. Obedecem a uma bem conhecida relação de período-luminosidade e pertencem à população do disco jovem. Estão presentes nos enxames abertos e denota-se uma certa relação entre as formas das curvas de luz destas variáveis e os seus períodos.

DCEPS. Variáveis do tipo Delta Cep com amplitudes menores que 0.5 mag no visível (menores que 0.7 mag no azul) e com curvas de luz quase simétricas ($M-m$ é aproximadamente 0.4 - 0.5 períodos); como regra, os seus períodos não excedem os 7 dias. São provavelmente variáveis pulsantes cuja frequência é múltipla da frequência fundamental e/ou estão na primeira transição através da faixa de instabilidade depois de terem deixado a sequência principal.

Tradicionalmente, tanto as variáveis Delta Cep (DCEP) como as variáveis do tipo W Vir (CW) são frequentemente chamadas de Cefeides pois é impossível distingui-las com base nas curvas de luz quando estas têm períodos entre os 3 e os 10 dias. Contudo, estes são grupos distintos de objectos inteiramente diferentes e em diferentes fases de evolução. Uma das diferenças espectrais mais significativas entre estes dois tipos de variáveis pulsantes é a presença, durante um certo intervalo de fase, de linhas de emissão de hidrogénio nas variáveis do tipo W Vir e de linhas de emissão de Ca II, H e K nas variáveis Delta Cep.

DSCT. Variáveis do tipo Delta Scuti. São variáveis pulsantes com tipos espectrais *A0-F5* pertencendo às classes de luminosidade III - V com amplitudes de luminosidade de 0.003 a 0.9 mag no visível (geralmente a amplitude é de várias centésimas) e com períodos de 0.01 a 0.2 dias. Geralmente as formas das curvas de luz, períodos e amplitudes variam bastante. Tanto pulsações radiais como pulsações não-radiais são observadas. A variabilidade de algumas estrelas deste tipo aparece esporadicamente e por vezes desaparece completamente, sendo este facto uma consequência da forte modulação da amplitude com o menor valor de amplitude não excedendo as 0.001 mag em alguns casos. O máximo da expansão da superfície fica desfasado atrás do máximo de luminosidade não mais do que um décimo do período. Estas estrelas são representativas do disco galáctico (componente plana da galáxia) e assemelham-se bastante com as variáveis do tipo SXPHE (ver abaixo).

DSCTC. Variáveis do tipo Delta Scuti de baixa amplitude. A amplitude de luminosidade é menor que 0.1 mag no visível. A maioria das estrelas deste tipo pertencem à classe de luminosidade V; os objectos deste subtipo são os representantes das variáveis Delta Scuti em enxames abertos.

L. Variáveis irregulares lentas. As variações luminosas não mostram evidência de periodicidade ou esta é mal pronunciada e aparece apenas ocasionalmente. Muitas variáveis são atribuídas a este tipo por terem sido estudadas insuficientemente, de forma análoga ao que acontece com as variáveis do tipo I (ver 1.2.1). Podem por isso ser semi-regulares ou de qualquer outro tipo. Este tipo de variáveis pode subdividir-se nos seguintes subtipos: **LB** (gigantes dos tipos espectrais *K, M, C e S*; no catálogo *GCVS* este tipo também é atribuído às variáveis irregulares lentas vermelhas no caso de serem desconhecidos os seus tipos espectrais e luminosidades) e **LC** (supergigantes de tipos espectrais tardios tendo amplitudes de cerca de uma magnitude no visível, e.g. a variável *TZ Cas*).

LBV. Estrelas pulsantes da classe espectral *B* com períodos relativamente longos (períodos excedendo um dia).

M. Variáveis do tipo Mira (Omicron) Ceti. São variáveis gigantes de períodos longos com espectros de emissão característicos (*Me, Ce, Se*) e amplitudes de luminosidade entre as

2.5 e as 11 mag no visível. A sua periodicidade é bem pronunciada e os períodos estão entre os 80 e os 1000 dias. As amplitudes no infravermelho são geralmente menores do que no visível e podem ser inferiores a 2.5 mag. Por exemplo, na banda K geralmente não excedem as 0.9 mag. No catálogo *GCVS*, quando a amplitude de uma variável excede as 1 - 1.5 mag mas não há certeza de que a verdadeira amplitude de luminosidade excede as 2.5 mag é atribuído o símbolo *M'* ou a variável é atribuída à classe das variáveis semi-regulares com o símbolo *SR'* (ver classe *SR* abaixo). As variáveis desta classe e as variáveis da classe *SR* são também designadas por **LPVs** (variáveis de período longo).

PVTEL. Variáveis do tipo *PV Telescopii*. São supergigantes de Hélio da classe espectral *Bp* com linhas fracas de Hidrogénio e linhas intensas de He e C. Pulsam com períodos de 0.1 a 1 dia aproximadamente ou variam de luminosidade com amplitudes de 0.1 mag no visível num intervalo de tempo de cerca de um ano.

RR. Variáveis do tipo *RR Lyrae*. Gigantes das classes espectrais *A-F* com modo de pulsação radial com amplitudes desde as 0.2 até as 2 mag no visível. São conhecidos casos de formas de curvas de luz assim como de períodos variáveis. Se há uma modulação periódica da forma e amplitude da curva de luz dizemos a variável exibe o efeito de Blazhko. Tradicionalmente, as estrelas do tipo *RR Lyrae* são por vezes denominadas de *Cefeides* de período curto ou variáveis do tipo *enxame*. A maioria destas estrelas pertence à componente esférica da Galáxia (halo); estão presentes, por vezes em grande número, em alguns enxames globulares, onde são conhecidas por estrelas pulsantes do ramo horizontal. Como acontece com as *Cefeides*, os tempos de velocidade máxima da expansão da superfície destas estrelas e os tempos de luz máxima praticamente coincidem. Dentro deste tipo de variáveis existem os seguintes subtipos: **RR(B)** (mostram simultaneamente dois modos funcionais de pulsação, o tom fundamental com o período *P0* e o primeiro sobretom, *P1*; a razão *P1/P0* é de aproximadamente 0.745), **RRAB** (com curvas de luz assimétricas (ramos ascendentes com declive bastante alto), períodos de 0.3 a 1.2 dias e amplitudes no visível de 0.5 a 2 mag) e **RRC** (com curvas de luz quase simétricas, por vezes sinusoidais, com períodos desde os 0.2 até aos 0.5 dias e amplitudes no visível não superiores a 0.8 mag).

RV. Variáveis do tipo *RV Tauri*. Estrelas supergigantes com pulsação radial, dos tipos espectrais *F-G* quando a luz é máxima e dos tipos *K-M* quando a luz é mínima. As curvas de luz são caracterizadas pela presença de ondas duplas onde se alternam os mínimos principal e secundário, que podem variar em profundidade de tal forma que o mínimo principal pode-se tornar secundário e vice-versa. A amplitude total de luminosidade pode atingir 3-4 mag no visível. Os períodos entre dois mínimos principais adjacentes (usualmente chamados períodos formais) vão desde os 30 aos 150 dias. São reconhecidos dois subtipos: **RVA** (não há variação da magnitude média, e.g. a variável *AC Her*) e **RVB** (variam periodicamente de magnitude média, em períodos que vão desde os 600 aos 1500 dias e com amplitudes até às 2 mag no visível, e.g. as variáveis *DF Cyg* e *RV Tau*).

SR. Variáveis semi-regulares. São estrelas gigantes ou supergigantes de tipos espectrais intermédios ou tardios nas quais se detecta periodicidade, acompanhada ou por vezes interrompida por várias irregularidades. Os períodos vão desde os 20 até mais de 2000 dias e as amplitudes podem variar desde várias centésimas até várias magnitudes (geralmente de 1 a 2 mag no visível). As curvas de luz assumem formas diferentes e variáveis. Este tipo de variáveis pode dividir-se nos seguintes subtipos: **SRA** (gigantes de tipos espectrais tardios (*M, C, S* ou *Me, Ce, Se*) mostrando periodicidade persistente e normalmente com amplitudes pequenas (inferiores a 2.5 mag no visível); as amplitudes e as formas da curva de luz geralmente variam e os períodos vão desde os 35 aos 1200 dias; muitas destas estrelas diferem das *Miras* apenas por terem amplitudes de luminosidade

mais pequenas), **SRB** (gigantes de tipos espectrais tardios (*M, C, S* ou *Me, Ce, Se*) com periodicidade mal definida (ciclos médios desde os 20 até os 2300 dias) ou com intervalos alternados de mudanças periódicas e de mudanças lentas irregulares, e até de intervalos de luminosidade constante; normalmente a cada estrela deste tipo é atribuído um período médio (ciclo), mas nalguns casos são dados simultaneamente dois ou mais períodos de variação de luminosidade), **SRC** (supergigantes de tipos espectrais tardios (*M, C, S* ou *Me, Ce, Se*) com amplitudes de cerca de 1 magnitude e períodos de variação de luminosidade desde os 30 até alguns milhares de dias) e **SRD** (gigantes e supergigantes dos tipos espectrais *F, G* ou *K*, por vezes com linhas de emissão no seu espectro; as amplitudes de variação de luz vão desde as 0.1 até as 0.4 mag e os períodos desde os 30 até os 1100 dias).

SXPHE. São subanãs pulsantes da população da componente esférica (disco antigo) da galáxia dos tipos espectrais *A2-F5*, bastante semelhantes às variáveis DSCT. Podem mostrar simultaneamente vários períodos de oscilação, geralmente na ordem dos 0.04-0.08 dias, com amplitudes de mudança de luminosidade variáveis que podem atingir as 0.7 mag no visível. Estas estrelas estão presentes em enxames globulares.

ZZ. Variáveis do tipo ZZ Ceti. São anãs brancas com modo de pulsação não radial que mudam de luminosidade em períodos desde os 30 segundos até os 25 minutos e com amplitudes que vão desde as 0.001 às 0.2 mag no visível. Geralmente mostram vários valores de período próximos. Erupções de uma magnitude são por vezes observadas; contudo, estas podem ser explicadas pela presença de companheiras próximas do tipo UV Ceti (ver classe UV em 1.2.1). Este tipo pode ser dividido em três subtipos: **ZZA** se são do tipo espectral *DA* tendo apenas linhas de absorção de hidrogénio no seu espectro, **ZZB** se são do tipo espectral *DB* tendo apenas linhas de absorção de hélio no seu espectro e **ZZO** se são do tipo espectral *DO* com linhas de absorção de HeII e de CIV no seu espectro.

1.2.3 Variáveis rotacionais

As variáveis rotacionais são estrelas de brilho superficial não-uniforme e/ou de forma elipsoidal, cuja variabilidade de brilho advém da sua rotação axial em relação ao observador. A distribuição não uniforme do seu brilho superficial pode ser causado pela presença de pontos ou pela não-homogeneidade térmica ou química da sua atmosfera causada pela presença dum campo magnético cujo eixo não coincide com o eixo rotacional.

ACV. Variáveis do tipo Alpha2 Canum Venaticorum. São estrelas da sequência principal dos tipos espectrais *B8p-A7p* com campos magnéticos fortes. O espectro mostra linhas anormalmente fortes de Si, Sr, Cr e terras raras (ou lantanídeos - elementos químicos com números atômicos desde o 57 até o 71) cujas intensidades variam com a rotação. Denotam mudanças no campo magnético e na luminosidade (com períodos de 0.5 a 160 dias ou superiores). As amplitudes de mudança de luminosidade estão geralmente entre as 0.01 e as 0.1 mag no visível.

ACVO. Variáveis do tipo ACV de oscilação rápida. São variáveis rotacionais magnéticas de pulsação não-radial do tipo espectral *Ap*. Os períodos de pulsação estão entre os 0.004 e os 0.01 dias, enquanto as amplitudes de variação de luminosidade causadas pela pulsação são cerca de 0.01 mag no visível. As variações de pulsação sobrepõem-se às variações causadas pela rotação.

BY. Variáveis do tipo BY Draconis. São estrelas anãs com linhas de emissão dos tipos espectrais *dKe-dMe* mostrando variações de luminosidade quase periódicas com períodos desde uma fracção de um dia até 120 dias e amplitudes desde várias centésimas até 0.5

mag no visível. A variação de luz é causada pela rotação axial dum estrela com um grau variável de não-uniformidade de luminosidade à superfície (manchas) e actividade cromosférica. Nalgumas destas estrelas observam-se erupções semelhantes às estrelas do tipo UV Ceti (ver classe UV em 1.2.1) e neste caso estas também pertencem a esse tipo e são simultaneamente consideradas variáveis eruptivas.

ELL. Variáveis rotacionais elipsoidais. São sistemas binários apertados com componentes elipsoidais, cuja luminosidade combinada varia com períodos iguais aos períodos do movimento orbital devido à mudança das áreas de emissão relativamente ao observador, mas nos quais não se observam eclipses. As amplitudes de luminosidade não excedem as 0.1 mag no visível.

FKCOM. Variáveis do tipo FK Comae Berenices. São gigantes com rotação rápida cuja luminosidade na superfície não é uniforme. Têm tipos espectrais *G-K* com emissão em H para além de emissão em K, Ca II e por vezes em H α . Podem ser também sistemas binários espectroscópicos. Os períodos de variação de luz (vão até vários dias) são iguais aos períodos de rotação, e as amplitudes são de vários décimos dum magnitude. Não está excluída a hipótese de que estes objectos possam ser o produto dum evolução dos sistemas binários apertados do tipo EW (ver 1.2.5).

PSR. Pulsares com variações no óptico que são estrelas de neutrões de rotação rápida com campos magnéticos fortes que emitem radiação no rádio, no óptico e em raios-X. Estas variáveis emitem feixes estreitos de radiação; os seus períodos de variação de luz coincidem com os seus períodos de rotação (os períodos vão desde os 0.004 até aos 4 segundos) enquanto que as amplitudes das pulsações de luz atingem as 0.8 mag.

R. Variáveis de reflexão. Sistemas binários apertados caracterizados pela presença dum forte reflexão (re-radiação) da luz da estrela mais quente que ilumina a companheira mais fria. As curvas de luminosidade são sinusoidais com períodos iguais ao do período orbital do sistema binário e o tempo de luminosidade máxima coincide com a passagem da estrela mais quente à frente da companheira. Pode não haver a ocorrência de eclipse. A amplitude de variação de luz está entre 0.5 e 1 mag no visível.

SXARI. Variáveis do tipo SX Arietis. Estrelas da sequência principal dos tipos espectrais *B0p-B9p* com linhas de He I e Si III e campos magnéticos de intensidades variáveis. Por vezes são chamadas variáveis de hélio. Os períodos das variações de luminosidade e do campo magnético (cerca de 1 dia) coincidem com os períodos de rotação. As amplitudes no visível são de aproximadamente 0.1 mag. Estas estrelas são análogas a variáveis do tipo ACV com altas temperaturas.

1.2.4 Variáveis cataclísmicas (explosivas e tipo-Novas)

As variáveis explosivas são estrelas variáveis que denotam explosões causadas por processos termonucleares ocorrendo nas suas camadas superficiais (Novas) ou nas suas camadas interiores (Supernovas). O termo tipo-Nova aplica-se às variáveis que mostram explosões como as das Novas causados pela emissão rápida de energia para o espaço circundante (estrelas do tipo UG – ver abaixo) e também para objectos que não mostram explosões mas que se assemelham às Novas por terem características espectrais (ou outras características) semelhantes às destas variáveis aquando da sua luz mínima. A maioria das variáveis cataclísmicas são sistemas binários apertados, cujos componentes têm uma influência mútua forte na evolução da sua companheira. É frequentemente observado que a anã (a componente quente do sistema) está rodeada por um disco de acreção formado por matéria perdida pela sua companheira maior e mais fria.

N. Novas. Sistemas binários apertados com períodos orbitais entre 0.05 dias e 230 dias. Uma das componentes é uma anã quente que, repentinamente, durante um intervalo de tempo de um a várias dúzias ou a várias centenas de dias, aumenta o seu brilho em 7-19 mag no visível, para depois, gradualmente, ao longo de vários meses, anos ou décadas, retornar ao seu estado inicial de luminosidade. Podem ocorrer pequenas mudanças na luz mínima. As componentes frias podem ser gigantes, subgigantes ou anãs dos tipos espectrais *K-M*. O espectro das novas quando estas estão próximas da luz máxima assemelha-se, a princípio, ao espectro de absorção das estrelas luminosas dos tipos espectrais *A-F*. Depois aparecem no espectro largas bandas de emissão de hidrogénio, hélio e outros elementos, com a absorção de componentes indicando a presença de um invólucro de matéria a se expandir rapidamente. Assim que a luminosidade decresce, começam-se a ver no espectro composto linhas características do espectro de nebulosas difusas excitadas por estrelas quentes. Quando a luz é mínima, o espectro das novas é geralmente contínuo ou assemelha-se com o espectro das estrelas Wolf-Rayet. Só os espectros dos sistemas mais massivos mostram vestígios de componentes frios. Algumas Novas, após uma explosão, revelam pulsações das componentes quentes com períodos de aproximadamente 100 segundos e amplitudes de cerca de 0.05 mag no visível. Eventualmente, descobre-se que algumas das Novas são, afinal, sistemas eclipsantes. De acordo com as características das suas variações de luminosidade, as Novas podem ser subdivididas em: **NA** - Novas rápidas (aumento rápido de luminosidade seguido dum queda de 3 mag em 100 ou menos dias após se ter atingido a luminosidade máxima, e.g. a variável *GK Per*), **NB** - Novas lentas (depois de atingida a luminosidade máxima, dá-se uma queda de 3 mag em pelo menos 150 dias; nos casos das Novas cujas curvas de luz apresentam uma depressão acentuada, a taxa de queda de luminosidade é estimada com base numa curva suave em que as partes antes e depois da depressão são a continuação directa uma da outra), **NC** - Novas muito lentas (têm um desenvolvimento bastante lento permanecendo em luz máxima por mais de uma década e diminuindo depois de luminosidade muito lentamente; antes dum explosão estas estrelas podem mostrar mudanças de luminosidade de períodos longos com amplitudes de 1-2 mag no visível; as componentes frias destes sistemas são provavelmente gigantes ou supergigantes, por vezes variáveis semi-regulares e até variáveis *Mira*; as amplitudes das explosões podem atingir as 10 mag; quando estas variáveis estão no máximo de luminosidade o seu espectro de emissão é parecido com o das nebulosas planetárias, estrelas Wolf-Rayet e variáveis simbióticas; não é excluída a possibilidade de que estes objectos sejam nebulosas planetárias no processo de formação) e **NR** - Novas recorrentes (diferem das Novas típicas pelo facto de terem sido observadas duas ou mais explosões (em vez de uma única) separadas por 10-80 anos, e.g. a variável *T CrB*).

NL. Variáveis tipo-Novas. São objectos insuficientemente estudados, que se assemelham às Novas pelas suas variações de brilho ou pelas suas características espectrais. Este tipo inclui, para além das variáveis que demonstram fenómenos explosivos análogos aos das Novas, objectos nos quais ainda não se observaram explosões; os espectros destas variáveis assemelham-se ao das Novas antigas, e as variações pequenas de luminosidade parecem-se com as variações típicas das Novas antigas quando a sua luminosidade é mínima. Contudo, com alguma frequência, uma investigação detalhada torna possível a reclassificação dalguns objectos desta classe bastante heterogénea em outros tipos de estrelas variáveis.

SN. Supernovas. Estrelas que aumentam de brilho pelo menos 20 magnitudes, como resultado de uma explosão catastrófica e que depois decaem de brilho lentamente. O espectro durante a explosão é caracterizado pela presença de largas bandas de emissão, cuja largura é várias vezes maior que a das bandas brilhantes observadas nos espectros das

Novas. As velocidades de expansão dos invólucros das Supernovas são da ordem dos milhares de quilómetros por segundo. Após a explosão a estrutura estelar altera-se completamente, ficando um pulsar (nem sempre observável) ou um buraco negro na posição da estrela original e formando-se uma nebulosa de emissão que se vai expandindo. De acordo com a forma da curva de luz e com as características espectrais, as supernovas podem dividir-se nos subtipos **SNI** (Supernovas do tipo I: com linhas de absorção em Ca II, Si e outros elementos, mas com ausência de linhas de hidrogénio no espectro; o invólucro de matéria em expansão quase não tem hidrogénio; durante os 20-30 dias após a luz máxima, há um decréscimo de luminosidade de aproximadamente 0.1 mag por dia; depois, a taxa de decréscimo de luminosidade diminui até ao valor constante de 0.014 por dia) e **SNII** (Supernovas do tipo II: linhas de hidrogénio e de outros elementos presentes no espectro; o invólucro de matéria em expansão é constituído principalmente por H e He; maior diversidade nas curvas de luz comparativamente com as Supernovas do tipo I; geralmente após 40-100 dias após a luz máxima, a taxa de declínio de luminosidade é de 0.1 mag por dia).

UG. Variáveis do tipo U Geminorum, frequentemente chamadas de Novas-anãs. São sistemas binários apertados constituídos por uma anã ou subgigante da classe espectral *K-M* que ocupa o volume do seu lóbulos de Roche e por uma anã branca rodeada por um disco de acreção. Os períodos orbitais vão desde os 0.05 aos 0.5 dias. Geralmente só são observadas pequenas flutuações, em alguns casos flutuações rápidas mas, de tempos a tempos, um sistema aumenta rapidamente de luminosidade em várias magnitudes e depois de um intervalo de vários dias a um mês ou mais, retorna ao seu estado original. Os intervalos entre duas explosões consecutivas de uma estrela podem variar bastante, mas toda a estrela é caracterizada por um certo valor médio desses intervalos, isto é, um ciclo médio que corresponde à média da amplitude de luminosidade. Quanto maior o ciclo, maior a amplitude. Estes sistemas são frequentemente fontes de emissão de raios-X. O espectro destes sistemas na fase de luz mínima é contínuo, com linhas largas de emissão de H e He. Na fase de luz máxima estas linhas quase desaparecem ou tornam-se linhas ténues de absorção. Alguns destes sistemas são eclipsantes, possivelmente indicando que o mínimo principal é causado pelo eclipse de um ponto quente originado, no disco de acreção, pela queda de um feixe de gás vindo da estrela da classe espectral *K-M*. De acordo com as características das variações de luminosidade, estas variáveis podem ser divididas em três subtipos: **UGSS** (Variáveis do tipo SS Cygni: aumentam de luminosidade 2-6 mag no visível em 1-2 dias e nos seguintes dias retornam à sua luminosidade original; os valores do ciclo vão desde os 10 dias até vários milhares), **UGSU** (Variáveis do tipo SU Ursae Majoris: são caracterizadas pela presença de dois tipos de explosões denominadas normais e máximas; as explosões normais são explosões curtas semelhantes às das estrelas UGSS enquanto que as explosões máximas são 2 magnitudes mais brilhantes, duram pelo menos cinco vezes mais e ocorrem com menos frequência; durante a explosão máxima as curvas de luz mostram oscilações periódicas sobrepostas (picos altos) com períodos próximos dos períodos orbitais e com amplitudes de 0.2-0.3 mag no visível; os períodos orbitais são inferiores a 0.1 dias; as estrelas companheiras são do tipo espectral *dM*) e **UGZ** (Variáveis do tipo Z Camelopardalis: as explosões são cíclicas; diferem das variáveis UGSS pelo facto de que, por vezes, depois de uma explosão estas não retornam à luminosidade original mas, durante vários ciclos, mantêm uma certa magnitude entre as magnitudes máxima e a mínima; os valores dos ciclos vão desde os 10 aos 40 dias e as amplitudes de luminosidade vão desde as 2 às 5 mag no visível).

ZAND. Variáveis simbióticas do tipo Z Andromedae. São sistemas binários apertados constituídos por uma estrela quente, uma estrela de tipo espectral tardio e um invólucro de

matéria aceso pela radiação emitida pela estrela quente. O brilho combinado das duas componentes mostra variações irregulares com amplitudes que vão até as 4 mag na zona do visível. É um grupo muito heterogéneo de objectos.

1.2.5 Variáveis eclipsantes

As variáveis eclipsantes são sistemas binários apertados, isto é, sistemas binários estelares em que as componentes, ao realizarem o seu movimento orbital em torno do centro de massa, ocasionam eclipses, parciais ou totais (em relação ao observador).

No catálogo GCVS adoptou-se um sistema triplo de classificação destas variáveis atendendo a três diferentes aspectos destas variáveis, nomeadamente a forma da curva de luz do sistema binário, as características físicas e as características evolucionárias dos seus componentes. A classificação baseada nas curvas de luz é simples, tradicional e é a mais útil para os observadores; a segunda e a terceira classificação têm em consideração as posições dos componentes do sistema binário no diagrama M_V versus $B-V$ e o grau de preenchimento do lóbulos de Roche. As estimativas são feitas aplicando um simples critério proposto por Svehnikov e Istomin em 1979 (Kholopov et al, 1985).

(i) Classificação baseada na forma das curvas de luz:

E. Sistemas binários eclipsantes. São sistemas binários com planos orbitais tão próximos da linha de visão do observador (i - a inclinação do plano orbital em relação ao plano do céu, ortogonal à linha de visão do observador - tem valor próximo dos 90 graus) que as componentes do sistema sofrem eclipses periodicamente. Consequentemente, o observador apercebe-se de mudanças aparentes na luminosidade do sistema, de período coincidente com o período do movimento orbital das componentes do mesmo.

EA. Sistemas eclipsantes do tipo Algol (Beta Persei). Os componentes destes sistemas são esféricos ou ligeiramente elipsoidais. É possível especificar através das suas curvas de luz o início e o fim dos eclipses. Entre os eclipses a luminosidade permanece quase constante ou varia insignificamente devido a efeitos de reflexão, à ligeira elipticidade dos componentes ou a variações de carácter físico do sistema. Pode não haver mínimo secundário. Podem-se observar uma grande variedade de períodos desde os 0.2 dias até mais de 10000 dias. As amplitudes de luminosidade são também bastante diferentes e podem atingir várias magnitudes.

EB. Variáveis eclipsantes do tipo Beta Lyrae. São sistemas eclipsantes cujos componentes são elipsoidais, com curvas de luz nas quais é impossível especificar os tempos exactos do início e do fim do eclipse devido a uma variação contínua da luminosidade aparente do sistema entre os eclipses; o mínimo secundário é sempre observável e a sua profundidade é geralmente considerada como sendo menor do que a do mínimo principal; os períodos são geralmente maiores do que 1 dia. As componentes geralmente são das classes espectrais $B-A$. As amplitudes no visível são geralmente menores do que 2 magnitudes.

EW. Variáveis eclipsantes do tipo W Ursae Majoris. São sistemas binários apertados de períodos inferiores a 1 dia cujos componentes elipsoidais estão quase em contacto; é impossível especificar através das suas curvas de luz os tempos exactos de início e fim dos eclipses. As profundidades dos mínimos principal e secundário são praticamente iguais (a diferença entre os dois é insignificante). As amplitudes de luminosidade no visível são geralmente inferiores a 0.8 magnitudes. Os componentes do sistema geralmente pertencem aos tipos espectrais $F-G$ ou a tipos espectrais superiores.

(ii) Classificação com base em características físicas dos componentes:

AM. Variáveis do tipo AM Her. São sistemas binários apertados constituídos por uma anã do tipo espectral dK ou dM e por um objecto compacto com um campo magnético forte, que apresentam uma variabilidade linear e polarização circular da luz. A amplitude de variação da luminosidade pode atingir as 4 ou 5 magnitudes no visível.

GS. Sistemas em que pelo menos uma das componentes é uma gigante ou supergigante; a outra componente pode ser uma estrela da sequência principal.

PN. Sistemas que têm, entre os seus componentes, o núcleo duma nebulosa planetária, e.g. a variável UU Sge.

RS. Sistemas do tipo RS Canum Venaticorum. Uma propriedade significativa destes sistemas é a presença no espectro de fortes linhas de emissão de Ca II, H e K de intensidade variável, indicando actividade cromosférica do tipo solar. Estes sistemas também são caracterizados pela emissão de ondas rádio e raios-X. Alguns têm curvas de luminosidade que exibem ondas quase sinusoidais fora dos eclipses, em que as amplitudes e as posições variam lentamente ao longo do tempo. A presença desta onda (por vezes chamada de onda de distorção) é explicada pela rotação diferencial da estrela cuja superfície estará coberta por grupos de manchas; o período de rotação de um grupo de manchas é geralmente próximo do período do movimento orbital (período dos eclipses) mas difere ainda um pouco deste, razão pela qual ainda há uma lenta mudança (migração) das fases da onda de distorção, mínimo e máximo, da curva de luminosidade do sistema. A variabilidade da amplitude desta onda (que pode atingir as 0.2 mag no visível) é explicada pela existência de um ciclo de actividade estelar de longo período, semelhante ao ciclo de 11 anos de actividade solar, durante o qual o número e a área total das manchas na superfície da estrela variam.

WD. Sistemas compostos por duas anãs brancas.

WR. Sistemas que têm estrelas Wolf-Rayet entre os seus componentes (um ou os dois), e.g. a variável V 444 Cyg.

(iii) Classificação baseada no grau de preenchimento dos lóbulos de Roche:

AR. Sistemas desligados do tipo AR Lacertae. Ambos os componentes são subgigantes não preenchendo as suas superfícies interiores equipotenciais (lóbulos de Roche).

D. Sistemas desligados, cujos componentes não preenchem os seus lóbulos de Roche. Atendendo à constituição do sistema temos os seguintes subtipos: **DM** (ambos os componentes são estrelas da sequência principal que não preenchem os seus lóbulos de Roche), **DS** (sistemas desligados com uma subgigante; esta também não preenche o seu lóbulo de Roche) e **DW** (sistemas semelhantes aos sistemas do tipo KW (ver abaixo) pelas suas propriedades físicas e composição, mas que não estão em contacto).

K. Sistemas em contacto em que ambos os componentes preenchem as suas superfícies críticas interiores (lóbulos de Roche). Atendendo à constituição do sistema temos os seguintes subtipos: **KE** (sistemas em contacto dos tipos espectrais $O-A$ em que ambos os componentes estão próximos, em tamanho, dos seus lóbulos de Roche) e **KW** (sistemas em contacto do tipo W UMa com componentes elipsoidais dos tipos espectrais $F0-K$; os componentes principais são estrelas da sequência principal e os componentes secundários ficam por baixo e à esquerda da sequência principal no diagrama H-R).

SD. Sistemas semi-desligados nos quais a superfície do componente menos massivo está próxima do seu lóbulo de Roche.

Geralmente há múltiplas classificações para cada variável eclipsante baseadas nestes três sistemas de classificação; os símbolos de cada classificação são normalmente separados pelo símbolo “/” (Kholopov et al, 1985).

1.2.6 Variáveis fontes de raios-x

As estrelas de raios-X constituem uma classe completamente heterogénea, cuja principal característica é a emissão de raios-X, associada à variação visual de brilho.

X. Sistemas binários apertados que são fontes fortes de emissão variável de raios-X e que ainda não pertencem ou não foram atribuídos a nenhum dos tipos anteriormente descritos de estrelas variáveis. Um dos componentes do sistema é um objecto compacto e quente (uma anã branca, uma estrela de neutrões ou possivelmente um buraco negro). A emissão de raios-X é originada pela queda de matéria no objecto compacto ou num disco de acreção que rodeia esse objecto. Por sua vez, a emissão de raios-X incide na atmosfera da companheira de menor temperatura do objecto compacto e é novamente irradiada na forma de radiação óptica de alta temperatura (efeito de reflexão), fazendo assim que essa área na superfície da companheira fria tenha um tipo espectral inferior. Estes efeitos fazem com que estes sistemas tenham uma variabilidade óptica bastante complexa e peculiar. Estes objectos podem ser divididos nos seguintes subtipos: **XB** (sistemas com explosões de raios-X: são sistemas binários apertados com explosões visíveis no óptico e em raios-X, cujas durações vão desde vários segundos até aos 10 minutos com amplitudes de cerca de 0.1 mag no visível), **XF** (sistemas com flutuações de raios-X: têm variações rápidas nas radiações visíveis e de raios-X em tempos da ordem de várias dúzias de milissegundos), **XI** (sistemas com emissões irregulares de raios-X: são sistemas binários apertados constituídos por uma anã do tipo espectral *dA-dM* e um objecto quente compacto rodeado por um disco de acreção; têm variações irregulares de luminosidade em tempos de minutos ou horas e amplitudes de cerca de uma magnitude no visível; é possível que haja sobreposição duma variação periódica devido ao movimento orbital) e **XJ** (sistemas binários emissores de raios-X caracterizados pela presença de jactos relativistas evidentes nos comprimentos de onda das zonas rádio e de raios-X assim como no espectro da zona do visível na forma de componentes de emissão, mostrando desenquadramentos periódicos com velocidades relativas).

XND. Sistemas tipo-Nova emissores de raios-X. Têm para além de um objecto quente compacto, uma anã ou subgigante da classe espectral *G-M*. Ocasionalmente estes sistemas aumentam rapidamente de luminosidade em 4-9 mag no visível, sem no entanto se notar perda de matéria tanto no visível como nos raios-X. A duração da explosão pode chegar aos vários meses.

XNG. Sistemas emissores de raios-X tipo-Nova que têm como componente principal uma gigante ou supergigante de tipo espectral recente que têm como companheiro um objecto quente compacto. Após a explosão na componente principal, o material que foi ejectado cai no objecto compacto e causa, com um atraso significativo, a emissão de raios-X. As amplitudes são de cerca de 1-2 mag no visível.

XP. Sistemas com pulsares emissores de raios-X. O componente principal deste sistema é geralmente uma supergigante elipsoidal de tipo espectral recente. O efeito de reflexão é muito pequeno e a variação de luminosidade é causada, principalmente, pela rotação do componente elipsoidal. Os períodos de variação de luminosidade estão entre 1 e 100 dias; os períodos do pulsar do sistema vão desde 1 segundo a 100 minutos. As amplitudes de luminosidade geralmente não excedem várias décimas de uma magnitude.

XPR. Sistemas com pulsares emissores de raios-X que denotam efeitos de reflexão. Têm como componente principal uma estrela do tipo espectral $dB-dF$ e a outra componente é um pulsar emissor de raios-X que também pode emitir radiação no visível. A luminosidade média do sistema é máxima quando o componente principal do sistema é irradiado por raios-X; é mínima quando há pouca emissão de raios-X pelo pulsar. A amplitude total de luminosidade pode atingir as 2-3 mag no visível.

XPRM (ou XM). Sistemas emissores de raios-X constituídos por uma anã dos tipos espectrais $dK-dM$ e por um pulsar com um campo magnético forte. A acreção de matéria nos pólos magnéticos do objecto compacto é acompanhada pelo aparecimento de polarização linear e circular variável; por isso, estes sistemas são por vezes conhecidos como polarizados. Geralmente as amplitudes de variação de luminosidade são cerca de uma mag no visível; quando o componente principal do sistema é irradiado por raios-X, a amplitude média do sistema aumenta 3 mag no visível. A amplitude total de luz pode atingir as 4-5 mag no visível.

Se o feixe de emissão de raios-X originado nos pólos magnéticos do objecto quente compacto em rotação não passa pelo observador e o sistema não é observado como um pulsar então é omitida a letra "P" nos símbolos acima definidos para sistemas emissores de raios-X. Se o sistema emissor de raios-X é também uma variável eclipsante ou elipsoidal, estes símbolos são precedidos pelos símbolos "E" ou "ELL", respectivamente, ligados pelo símbolo "+" (e.g. E+XND).

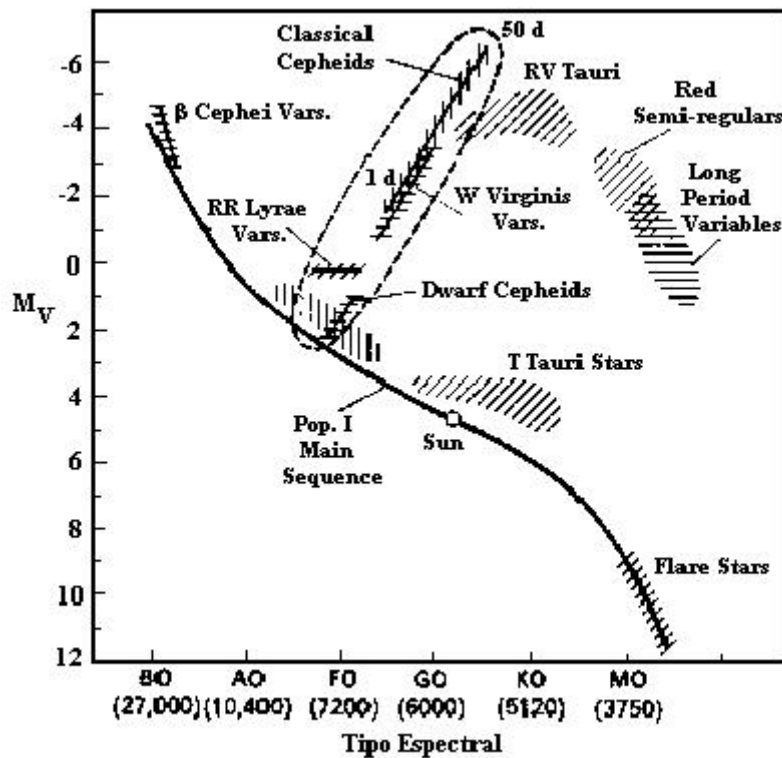


Figura 1 – Posição de várias classes de estrelas variáveis no diagrama H-R, Strohmeier (1972).

2 Análise de séries temporais

Uma *série temporal* consiste numa sequência de valores $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ obtidos pela medição do valor de y no conjunto dos tempos $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. A natureza sequencial das observações é crucial para a análise das variações, isto é, para a identificação dum padrão de variação, pois compreende-se que a variação de y é real. Tenta-se então encontrar uma explicação para o padrão de variação, isto é, tenta-se encontrar as causas (os processos físicos, no caso da aplicação a estrelas) que originam esta variação. No entanto, na grande maioria dos casos uma parte da variação é aleatória (Scargle, 1981). O padrão de variação pode consistir numa função linear ou numa oscilação harmónica parcialmente escondida por ruído. Por vezes não existe um padrão consistente de variação, pois os dados podem-se referir a um sistema físico aleatório (por exemplo o processo de decaimento radioactivo).

Apesar do nome, as séries temporais não se limitam a funções do tempo, estas séries podem-se referir também a posições no espaço (tridimensional), no céu (bidimensional) ou a comprimentos de onda (unidimensional). Assim, a variável t pode referir-se a outra variável que não seja o tempo, podendo esta ser multidimensional. A variável dependente y pode ser também multidimensional.

As séries temporais geralmente são discretas, pois na grande maioria dos casos os instrumentos apenas conseguem captar e gravar um número finito de dados, separados por um intervalo mínimo de tempo. Por vezes os valores de t podem ser escolhidos de forma a que os dados sejam igualmente espaçados.

Em resumo, uma série temporal pode ser:

- discreta ou contínua;
- univariada ou multivariada;
- unidimensional ou multidimensional;
- regularmente ou irregularmente espaçada.

Além disso, na análise duma série, podemos inferir que esta possui certas características importantes:

- ser ou não estacionária (os valores andam à volta de uma constante média);
- exhibir ou não efeitos periódicos (por exemplo, sazonais).

2.1 Metodologia geral

Um problema geral de previsão tem como etapas:

- a recolha de informação;
- a análise exploratória dos dados (visualização dos dados num gráfico; estatísticas simples: média, mediana, média dos desvios absolutos, média dos desvios quadráticos, variância, desvio padrão, mínimo, máximo, correlações; análise por decomposição: tendência, sazonalidade, ciclicidade, componente aleatória);
- a escolha de modelos (estrutura matemática; modelos paramétricos ou não);
- a estimação e avaliação dos modelos usados (estimação dos parâmetros: método dos mínimos quadrados; avaliação de resultados e erros).

Os métodos de previsão podem ser classificados em dois grupos:

- Métodos Qualitativos (assentam em juízos e especulações baseados na experiência e no estabelecimento de paralelismos com situações semelhantes; são justificáveis quando não se dispõe de dados sobre o passado longínquo ou quando se prevêem alterações significativas que invalidem a estabilidade dos padrões de comportamento passados);
- Métodos Quantitativos (assentam na manipulação matemática de dados passados e procuram projectar no futuro padrões de comportamento que se identificaram nos dados sobre o passado; pressupõe-se a estabilidade dos padrões de comportamento passados). Dentro dos métodos quantitativos identificam-se dois tipos de modelos de previsão:
 - a) Modelos causais (ou explicativos) que assumem que existe uma relação entre a variável sobre a qual se pretende fazer previsões – variável dependente – e outras variáveis que possam explicar o comportamento da primeira – variáveis independentes ou explicativas; nestes modelos assume-se que as relações (de causa-efeito) entre as variáveis vão-se manter estáveis;
 - b) Modelos não-causais (ou de séries temporais) que assentam apenas na análise de séries de valores passados da variável a prever, procurando caracterizar a sua forma de evolução e projectar no futuro esses padrões de comportamento. Estes modelos tratam o sistema como uma “caixa preta” uma vez que não existe qualquer tentativa de explicação sobre os factores que afectam o comportamento da série; estes modelos são utilizados quando o sistema não é entendido ou quando é muito difícil quantificar as relações que afectam o seu comportamento.

Existem modelos que contêm características de ambas as abordagens a) e b).

A modelação de *séries temporais* é tipicamente realizada através de modelos estocásticos paramétricos. Nestes modelos supõe-se que o processo de geração da série pode ser expresso na forma $Y_k = f(k; \theta) + \varepsilon_k$ onde f é uma função dependente de parâmetros θ designada por *senal* e ε_k é uma sequência de variáveis aleatórias, independente de f , designada por *ruído*. Geralmente supõe-se que as variáveis aleatórias ε_k têm valor médio zero e variância constante; em geral supõe-se também que são não correlacionadas sendo então designadas por *ruído branco*.

Estes modelos podem ser do tipo:

- linear (por exemplo: modelos de regressão linear, autorregressivos de médias móveis);
- não linear (por exemplo: modelos de regressão polinomial, redes neuronais).

Modelar uma série passa por:

- fazer o diagnóstico de características da série (no domínio do tempo e/ou no domínio das frequências);
- preprocessar a série, se conveniente (por exemplo, transformação não linear, resampling);
- escolher um modelo paramétrico e especificar a sua estrutura matemática;

- escolher valores para possíveis metaparâmetros (susceptíveis de serem otimizados face a uma medida de performance: erro absoluto médio, erro quadrático médio, raiz do erro quadrático médio, erro percentual absoluto médio);
- escolher um método para estimar os valores dos parâmetros do modelo;
- realizar a estimação do modelo;
- fazer o diagnóstico dos erros (dos erros de previsão ou de erros residuais de ajustamento).

2.1.1 Técnicas de diagnóstico e pré-processamento

Estas técnicas têm como objectivo encontrar características importantes no conjunto das observações. Quanto mais características se apurarem, mais fácil será a escolha de um modelo apropriado.

Existem os *métodos gráficos* que consistem na visualização do conjunto de observações. Como exemplos existem os gráficos temporais, os gráficos sazonais e os gráficos de dispersão.

Num *gráfico temporal* é possível distinguir visualmente a presença ou não de quatro tipos de padrões nas séries: *nível* (quando os valores variam à volta de uma constante média; este tipo de séries temporais dizem-se estacionárias), *tendência* (quando há um aumento ou decréscimo de valores da série ao longo do tempo), *sazonalidade* (quando a série é influenciada por factores sazonais; estas séries temporais dizem-se periódicas) e *ciclicidade* (os dados exibem variações de período variável).

Os *gráficos sazonais* são destinados a séries temporais que exibem padrão sazonal, pois estes sobrepõem os vários ciclos sendo possível visualizar com mais clareza a sazonalidade da série.

Os *gráficos de dispersão* são mais apropriados para dados onde se pretendem encontrar relações de dependência entre variáveis (por exemplo: coeficiente de correlação).

Podemos também determinar algumas *estatísticas simples* da série temporal.

A) Dados univariados (y_i) de número total n :

Temos, por exemplo, a *média* e a *mediana* que fornecem uma medida do centro dos dados.

$$\text{média} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (1)$$

$$\text{mediana} = \begin{cases} y_{(n+1)/2} & , n \text{ ímpar} \\ \frac{(y_{(n/2)} + y_{(n/2)+1})}{2} & , n \text{ par} \end{cases}$$

Podemos atribuir pesos α_i a cada uma das observações y_i , tendo então uma *média ponderada* dada por:

$$\bar{y} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

Ao valor $(y_i - \bar{y})$ designamos por *desvio*. A soma dos desvios é zero já que $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n y_i - \bar{y}n = 0$ [de (1)]. Temos as seguintes estatísticas simples relacionadas com os desvios:

Média dos Desvios Absolutos (MAD)

$$MAD = \frac{1}{n} \sum |y_i - \bar{y}| \quad (2)$$

Média dos Desvios Quadráticos (MSD)

$$MSD = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (3)$$

a *variância* (S^2)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (4)$$

e o *desvio padrão* (S)

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (5).$$

As quantidades (2) – (5) fornecem medidas de dispersão, isto é, quanto os dados estão próximos ou distantes uns dos outros. Quanto maior o seu valor, mais dispersos estão os dados relativamente ao valor médio. A variância e a MSD são medidas muito semelhantes, mas torna-se que a primeira medida é menos intuitiva apesar de ser a preferida dos estatísticos.

B) Dados bivariados (x_i, y_i) de número total n

Temos, por exemplo, a *covariância* (cov_{XY})

$$\text{cov}_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (6)$$

e o *coeficiente de correlação* (r_{XY})

$$r_{XY} = \frac{\text{cov}_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad [\text{de (5) e (6)}].$$

O coeficiente de correlação tem como objectivo medir o grau de relacionamento (linear), bem como a natureza dessa associação, entre duas variáveis estatísticas. Assim o coeficiente de correlação não deve ser aplicado em associações não lineares. O coeficiente de correlação toma valores $0 \leq |r_{XY}| \leq 1$ sendo $r_{XY} > 0$ se a evolução das variáveis dá-se no mesmo sentido e $r_{XY} < 0$ se a evolução das variáveis dá-se em sentidos opostos. Se $0 < |r_{XY}| < 1$ a variável independente X contém alguma informação sobre Y, de modo que é possível fazer previsões de Y quando X é conhecido, mas essas previsões não serão perfeitas, estando sujeitas a erros. No caso $r_{XY} = 0$ não existe correlação entre X e Y e se $|r_{XY}| = 1$ existe uma correlação perfeita entre X e Y. Note-se que o facto de haver uma correlação forte entre duas variáveis não significa que uma é a

causa da outra. A presença de valores extremos (outliers) pode afectar drasticamente o valor de r_{XY} .

O coeficiente de correlação desempenha um papel fundamental na análise multivariada, com particular destaque na regressão linear.

2.1.2 Medidas de performance e optimização

Estas medidas permitem a medição da eficácia de um modelo ou método de previsão.

É conveniente comparar e fazer a selecção/optimização de entre vários modelos possíveis, de entre variantes de um mesmo modelo (de acordo com os metaparâmetros utilizados) ou, ainda, de entre vários métodos de estimação. Para esse efeito, podemos calcular uma ou mais medidas de performance, baseadas nos erros $e_k = y_k - \hat{y}_k$ onde \hat{y}_k são os valores obtidos pelo modelo.

As medidas de performance usualmente mais consideradas são:

o *Erro Absoluto Médio* (MAE) dado por

$$MAE = \frac{1}{n} \sum |e_k|$$

o *Erro Quadrático Médio* (MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum e_k^2$$

a *Raiz do Erro Quadrático Médio* (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum e_k^2}$$

e o *Erro Percentual Absoluto Médio* (MAPE) dado por

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum \left| \frac{e_k}{y_k} \right|$$

O MAE é mais intuitivo que o MSE, mas este último é melhor para trabalhar matematicamente. As três primeiras medidas de performance dependem da ordem de grandeza dos dados. A medida MAPE poderá fornecer mais informação do que as outras, no entanto, não é utilizável quando surgem valores iguais a zero nas observações.

A diversidade de procedimentos durante a fase de estimação nos diferentes métodos pode afectar drasticamente a medida de performance usada. Por exemplo, nos métodos de estimação recursiva, como os de alisamento exponencial, a inicialização escolhida influi significativamente nos valores das primeiras estimativas e, conseqüentemente, os primeiros erros deverão ser ignorados no cálculo da medida de performance.

Modelos com uma boa performance não implicam necessariamente bons modelos para previsão. Podem ocorrer situações de ocorrência extrema em que o modelo se ajusta demasiado aos dados, tendo por isso poucas capacidades de generalização; é o caso da interpolação polinomial com erros iguais a zero.

2.1.3 Estimação de parâmetros dum modelo

Para a estimação de parâmetros dum dado modelo é usual a utilização do *método dos mínimos quadrados*.

Se a função de alisamento do processo é dada por $x_c(t) = \sum_{\alpha=1}^m C_\alpha f_\alpha(t)$ onde $f_\alpha(t)$ são as funções que tentam modelar o processo e C_α são os coeficientes que queremos estimar (estes dependem da forma das funções $f_\alpha(t)$ e das observações x_k obtidas nos instantes t_k) então o sistema normal de equações que corresponde ao método dos

mínimos quadrados pode ser escrito na forma $\sum_{\alpha=1}^m A_{\alpha\beta} C_\alpha = B_\beta$ onde

$A_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^n f_\alpha(t_k) f_\beta(t_k)$ e $B_\beta = \sum_{k=1}^n x_k f_\beta(t_k)$. O MSE da função de alisamento e das

suas derivadas de ordem s em ordem a t pode ser determinado por $\sigma^2 [x_c^{[s]}(t)] = \sigma_*^2 \sum_{\alpha,\beta=1}^m A_{\alpha\beta}^{-1} f_\alpha^{[s]}(t) f_\beta^{[s]}(t)$ onde σ_*^2 é o erro de peso unitário dado por

$\sigma_*^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^n (x_k - x_c(t_k))^2$. O instante do extremo, t_e , é uma raiz da equação

$$x_c^{[1]}(t_e) = 0. \text{ Uma estimativa do seu RMSE é dada por } \sigma [t_e] = \frac{\sigma [x_c^{[1]}(t_e)]}{|x_c^{[2]}(t_e)|}.$$

Estas expressões podem ser generalizadas para o caso em que a função de alisamento depende de parâmetros adicionais D_γ com $\gamma = 1, \dots, p$. Escolhem-se valores iniciais e depois determinamos as *correções diferenciais* usando o sistema de equações:

$$\sum_{\alpha=1}^m f_\alpha(t_k) C_\alpha + \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial x_c}{\partial D_\gamma} D_\gamma = x_k - x_c(t_k), \text{ determinando os } m+p \text{ parâmetros } C_\alpha, D_\gamma \text{ e}$$

estimando os seus erros. As derivadas parciais $\frac{\partial x_c(t_k)}{\partial D_\gamma} = \sum_{\alpha=1}^m C_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha(t)}{\partial D_\gamma} \right)_{t=t_k}$ podem ser

determinadas usando os coeficientes C_α determinados das m equações normais para valores fixos de D_γ .

Para comparar os resíduos com as observações iniciais é utilizada a estatística

$$S = \frac{\sigma_C^2}{\sigma_O^2} = 1 - \frac{\sigma_{O-C}^2}{\sigma_O^2} \text{ onde } \sigma_O \text{ é o RMSE dos desvios das observações em relação à}$$

média, C refere-se aos valores calculados e O-C aos desvios dos valores observados em relação aos valores calculados (Andronov, 1994b).

2.2 Modelos matemáticos

2.2.1 Análise no domínio do tempo

Numa série temporal $\{y_1, \dots, y_n\}$ onde as observações y_k foram obtidas nos instantes t_k sendo $\Delta t = t_{k+1} - t_k = \alpha$ com α constante, é possível estabelecer a correlação entre pares de valores observados (em instantes desfasados no tempo), chamando-se esta relação de *autocorrelação*. Da mesma forma podemos definir a *autocovariância* sendo esta a variância entre pares de valores observados em instantes desfasados no tempo.

O *coeficiente de correlação* para um desfasamento numa unidade α de tempo mede o grau de relacionamento (linear) entre duas observações consecutivas da variável, e a sua estimação é dada pela expressão

$$r_1 = \frac{\sum_{k=2}^n (y_k - \bar{y}_{(1)})(y_{k-1} - \bar{y}_{(2)})}{\sqrt{\sum_{k=2}^n (y_k - \bar{y}_{(1)})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} (y_k - \bar{y}_{(2)})^2}}$$

onde n é o número de observações, y_k é a observação correspondente ao instante t_k , $\bar{y}_{(1)}$ é a média das últimas $n-1$ observações e $\bar{y}_{(2)}$ é a média das primeiras $n-1$ observações.

Uma vez que estas duas séries $\bar{y}_{(1)}$ e $\bar{y}_{(2)}$ são muito semelhantes, isto é, $\bar{y}_{(1)} \approx \bar{y}_{(2)}$, a definição de autocorrelação (e de autocovariância) pode ser simplificada.

É possível comparar observações desfasadas mais do que uma unidade α de tempo. Denotando por h o desfasamento em h unidades de tempo, sendo h um múltiplo de α , temos respectivamente a autocorrelação e a autocovariância:

$$r_h = \frac{\sum_{k=h+1}^n (y_k - \bar{y})(y_{k-h} - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2} \quad c_h = \frac{1}{n} \sum_{k=h+1}^n (y_k - \bar{y})(y_{k-h} - \bar{y})$$

As autocorrelações com desfasamentos h de α , 2α , ... unidades de tempo constituem a chamada *Função de Autocorrelação (ACF)*. É habitual representar a função ACF, isto é, os coeficientes de correlação para os diversos valores de desfasamento h , num gráfico designado por *Correlograma*. Este gráfico fornece indicações úteis sobre as características duma série, por exemplo a existência ou não dum padrão de sazonalidade, e constitui um auxiliar na identificação do modelo mais adequado.

A existência de autocorrelação numa série indica que os valores passados da variável encerram informação e portanto capacidade de predição dos valores actuais da série e presumivelmente de valores futuros.

No modelo *Auto-Regressivo (AR)*, que é o mais comum, assume-se que a observação da variável no instante t_k , y_k , relaciona-se com observações da mesma variável em instantes anteriores através da expressão:

$y_j = \sum_{k=1}^{m'} \psi_k y_{j-k} + \varepsilon_j$, onde ε_k é ruído e ψ_j são os coeficientes de auto-regressão (parâmetros do modelo) que se relacionam com os coeficientes de autocorrelação, r_h , pela seguinte relação $r_h = \sum_{j=1}^{m'} \psi_j r_{h-j}$ (Andronov, 1994a).

O número m' de termos define a ordem do modelo auto-regressivo, que se representa por $AR(m')$.

2.2.2 Análise no domínio das frequências

Dentro desta abordagem destacam-se a análise de Fourier e a análise de ondas.

2.2.2.1 Análise de Fourier

A análise de Fourier denomina um conjunto de técnicas utilizadas para a análise de séries temporais que têm o objectivo comum de tentar modelar as observações através da combinação linear de funções trigonométricas.

A) Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Este foi o primeiro método prático de análise de Fourier que surgiu. Para uma dada frequência ω , a DFT duma série discreta $\{X(t_j)\}$ é dada por

$$FT_X(\omega) = \sum_{j=1}^N X(t_j) e^{-i\omega t_j} \quad (7).$$

Infelizmente a DFT tem um mau desempenho para séries irregularmente espaçadas pois esta altera ligeiramente a frequência do sinal e a amplitude do sinal é bastante afectada (Foster, 1995).

A utilização da DFT em dados irregularmente espaçados só é vantajosa quando o objectivo é unicamente a determinação do período e se a razão sinal/ruído (SNR) é bastante pequena, isto é, $SNR \leq 2.5$ (Ferraz-Mello, 1981). Se a SNR é grande, a transformada DFT leva a erros na determinação do período que dependem do número de dados e do número de períodos cobertos pelos dados.

B) Periodograma clássico

O *periodograma* (ou “*power spectrum*”) é uma técnica utilizada para detectar a presença de periodicidade num sinal. É utilizado em séries temporais $\{X(t_i), i = 1, \dots, N_0\}$ que se podem escrever na forma $X(t_i) = X_s(t_i) + R(t_i)$ onde $X_s(t_i)$, denominado de sinal, é de natureza periódica e $R(t_i)$, denominado por ruído, corresponde aos erros experimentais e é de natureza aleatória; assume-se que o ruído tem distribuição normal, com média zero e variância constante, e que os ruídos em tempos diferentes são independentes.

O periodograma clássico para uma série espaçada de forma arbitrária é dado por [de (7)]

$$P_X(\omega) = \frac{1}{N_0} |FT_X(\omega)|^2 = \frac{1}{N_0} \left| \sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) e^{-i\omega t_j} \right|^2 = \frac{1}{N_0} \left(\left(\sum_k X(t_k) \cos \omega t_k \right)^2 + \left(\sum_k X(t_k) \sin \omega t_k \right)^2 \right)$$

Se a série X contém uma componente sinusoidal de frequência ω_0 então para este valor

e para valores próximos, os factores $X(t)$ e $e^{-i\omega t}$ estão em fase e vão dar uma boa contribuição para as somas da equação anterior, o que vai corresponder a um pico estreito no periodograma. O periodograma mede assim a dependência da função teste que pretende modelar os dados e a frequência.

Este método é inadequado para dados astronómicos pois as séries temporais são quase sempre irregularmente espaçadas, o que introduz inúmeras complicações na transformada de Fourier. A existência de espaçamentos irregulares altera ligeiramente a frequência e significativamente a amplitude do pico no periodograma. Quando os dados têm lacunas periódicas, aparecem picos falsos que são mais fortes nas frequências $\omega_s + k\omega_g$ onde ω_s é a frequência do sinal, ω_g é a frequência das lacunas e k é um número inteiro (Foster, 1995).

Se as observações são regularmente espaçadas com intervalo Δt , geralmente toma-se $\Delta t = 1$, $t_j = j$ e $X(t_j) = X_j$. A expressão resultante geralmente é analisada apenas para as $n = \frac{N_0}{2}$ frequências necessárias, nomeadamente $\omega_n = \frac{2\pi k}{T}$, com $n = 0, \dots, \frac{N_0}{2}$ e T o intervalo de tempo total. A frequência fundamental $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ corresponde à onda seno de período igual à totalidade do intervalo T , sendo a frequência mais baixa donde se pode retirar informação. Analogamente a frequência dada por $\omega_N = \frac{1}{2}(2\pi/\Delta t) = \pi N_0/T$ (chamada de Nyquist) é a maior frequência da qual se pode retirar informação pois $\Delta t = T/N_0$ é o menor intervalo que pode ser analisado.

C) Periodograma Modificado (MP)

Scargle (1982) estudou a fiabilidade e eficiência do periodograma para o caso de séries irregularmente espaçadas, o que o levou a um *periodograma modificado* destinado a este tipo de séries. Com esta modificação, a análise com periodogramas e a modelação dos dados em ondas seno utilizando o método dos mínimos quadrados são equivalentes.

O periodograma modificado é dado pela expressão:

$$P_X(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[\sum_j X(t_j) \cos \omega(t_j - \tau) \right]^2}{\sum_j \cos^2 \omega(t_j - \tau)} + \frac{\left[\sum_j X(t_j) \sin \omega(t_j - \tau) \right]^2}{\sum_j \sin^2 \omega(t_j - \tau)} \right\}$$

onde τ é definido por $\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_j \sin 2\omega t_j}{\sum_j \cos 2\omega t_j}$ e é este parâmetro que permite que este

periodograma modificado continue a ser invariante para translações no tempo para dados irregularmente espaçados.

O nível do espectro, z_0 , a partir do qual é seguro dizer, com probabilidade $1 - p_0$, que o pico que sobressai no periodograma deve-se a uma componente periódica e não é apenas ruído branco, é dado pela expressão $z_0 = -\ln \left[1 - (1 - p_0)^{1/N} \right]$ onde N é o

número de frequências analisadas e p_0 é um valor escolhido de acordo com a probabilidade pretendida (e.g., $p_0 = 0.01$ para uma probabilidade de 0.99).

D) Data-Compensated Discrete Fourier Transform (DCDFT)

Esta transformada, sugerida por Ferraz-Mello (1981) foi uma das primeiras tentativas para remover picos falsos do espectro, causados por grandes lacunas periódicas nos dados. Comparada com a DFT dá estimativas melhores da frequência e especialmente da amplitude (Foster, 1996a), permitindo ainda a procura de frequências secundárias.

Consideramos um processo periódico $g(t)=y(t)+x(t)$ em que $y(t)$ é uma função periódica e $x(t)$ é um processo Gaussiano onde para cada t , $x(t)$ é uma variável aleatória de média zero e variância S^2 . Seja $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_N)$ uma sequência de elementos do processo, à qual foi adicionada uma constante de forma a que $\sum_{i=1}^N f(t_i) = 0$.

Consideremos o produto interno dado por $(g_1, g_2) = \sum_{i=1}^N g_1(t_i) \cdot g_2(t_i)$.

Para uma dada frequência teste, ω , a curva de regressão sinusoidal que mais se ajusta aos dados é dada por $f_C(t) = \sum_{i=0}^2 c_i h_i(t)$ onde c_i são os coeficientes de regressão e $h_i(t)$ são as funções sinusoidais que tentam modelar os dados.

Tomamos as funções $\begin{cases} H_0(t) = 1 \\ H_1(t) = \cos(2\pi\omega t) \\ H_2(t) = \sin(2\pi\omega t) \end{cases}$ e fazemos a ortonormalização destas pelo

método de Gram-Schmidt obtendo as funções $\begin{cases} h_0 = a_0 H_0 \\ h_1 = a_1 H_1 - a_1 h_0 (h_0, H_1) \\ h_2 = a_2 H_2 - a_2 h_0 (h_0, H_2) - a_2 h_1 (h_1, H_2) \end{cases}$

onde os coeficientes a_0, a_1 e a_2 são determinados de maneira a que se verifique $(h_0, h_0) = (h_1, h_1) = (h_2, h_2) = 1$. Assim, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{cases} a_0^{-2} = N \\ a_1^{-2} = (H_1, H_1) - a_0^2 (H_0, H_1)^2 \\ a_2^{-2} = (H_2, H_2) - a_0^2 (H_0, H_2)^2 - a_1^2 (H_1, H_2)^2 - a_1^2 a_0^4 (H_0, H_1)^2 (H_0, H_2)^2 \\ \quad + 2a_0^2 a_1^2 (H_0, H_1)(H_0, H_2)(H_1, H_2) \end{cases}$$

e os coeficientes de regressão são dados por

$$\begin{cases} c_0 = (f, h_0) = 0 \\ c_1 = (f, h_1) = a_1 (f, H_1) \\ c_2 = (f, h_2) = a_2 (f, H_2) - a_1 a_2 c_1 [(H_1, H_2) - a_0^2 (H_0, H_1)(H_0, H_2)] \end{cases}$$

Para dados regularmente espaçados, se o período não é inferior ao espaçamento e a série é suficientemente grande para cobrir uniformemente todas as fases, então temos que

$$(H_0, H_1) \cong (H_0, H_2) \cong (H_1, H_2) \cong 0 \quad \text{e} \quad (H_1, H_1) \cong (H_2, H_2) \cong \frac{1}{2} a_0^{-2} = \frac{N}{2}.$$

Assim temos que $c_1 \cong a_0 \sqrt{2} (f, H_1)$ e $c_2 \cong a_0 \sqrt{2} (f, H_2)$ e a medida do “power spectrum” é a intensidade dada por $I(\omega) = 2a_0^2 \|F(\omega)\|^2 = c_1^2 + c_2^2$ onde $F(\omega)$ é a DFT (ver eq. (7)).

Para dados irregularmente espaçados a medida do “power spectrum” é também a intensidade mas agora $F(\omega)$ é a Data-Compensated DFT (DCDFT), dada por $F(\omega) = (f, h_1 + ih_2) / a_0 \sqrt{2}$.

Consoante os dados que estamos a considerar, pois muitas vezes em problemas astronómicos as medições não têm a mesma precisão, podemos definir o produto interno como $(g_1, g_2) = \sum_{i=1}^N \alpha(t_i) g_1(t_i) g_2(t_i)$ onde $\alpha(t_i) = \alpha_i$ é a função peso atribuída às observações. Neste caso temos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{-2} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \\ a_1^{-2} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos^2 x_i - a_0^2 \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \cos x_i \right)^2 \\ a_2^{-2} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sin^2 x_i - a_0^2 \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \sin x_i \right)^2 \\ \quad - a_1^2 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \sin x_i \cos x_i - a_0^2 \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \sin x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \cos x_i \right) \right]^2 \end{array} \right.$$

onde $x_i = 2\pi \omega t_i$. Neste caso os coeficientes de regressão são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0(\omega) = 0 \\ c_1(\omega) = a_1 \sum_{i=1}^N \alpha_i f(t_i) \cos x_i \\ c_2(\omega) = a_2 \sum_{i=1}^N \alpha_i f(t_i) \sin x_i \\ \quad - a_1 a_2 c_1 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \sin x_i \cos x_i - a_0^2 \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \sin x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \cos x_i \right) \right] \end{array} \right.$$

A medida do “power spectrum” numa dada frequência ω é dada também por $I(\omega) = c_1^2 + c_2^2$. A teoria da regressão linear diz-nos que $0 \leq I(\omega) \leq Q$ onde $Q = (f, f) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f^2(t_i)$. Esta propriedade é usada para introduzir o coeficiente de

correlação espectral dado por $S(\omega) = \frac{I(\omega)}{Q}$ que verifica a relação $0 \leq S(\omega) \leq 1$.

Apesar dos erros dados pela transformada DFT, Ferraz-Mello (1981) sugere a utilização desta para obter uma primeira aproximação do valor do período pois esta requer um

menor custo computacional que a DCDFE; esta última é então calculada apenas numa vizinhança do valor obtido. Contudo, as discrepâncias entre os espectros determinados a partir da DFT e da DCDFE tornam-se bastante grandes para frequências suficientemente pequenas (inferiores a 0.1). No caso em que a SNR é bastante pequena (inferior a 2.5) pode acontecer que a transformada DCDFE não dê uma melhor determinação do valor do período, mas esta tem ainda a vantagem de dar uma melhor estimativa da altura do pico o que é crucial se pretendemos mais do que a simples determinação do período (Ferraz-Mello, 1981).

Pode-se dar o caso em que o processo periódico em estudo seja formado por várias ondas, não necessariamente harmónicas (o que acontece nalgumas estrelas variáveis devido ao efeito de Blazhko (ver 1.2.2)). Apesar de um período poder ser seleccionado pela inspecção do espectro, nada pode ser dito sobre outras periodicidades pela análise do mesmo espectro pois os outros picos do espectro podem apenas ser replicações do pico principal. Para procurar outras componentes periódicas, filtra-se a série temporal eliminando a onda seno cujo período foi determinado.

Seja $\bar{\omega}$ o período da onda e $d(\bar{\omega}, t) = c_1(\bar{\omega})h_1(\bar{\omega}, t) + c_2(\bar{\omega})h_2(\bar{\omega}, t)$. A nova série temporal é dada por $\hat{f}(t) = f(t) - d(\bar{\omega}, t)$. Proceda-se à análise desta nova série da mesma forma que foi analisada a série inicial. Este procedimento permite encontrar as frequências secundárias do sinal.

Podemos constatar que $(\hat{f}, h_0) = 0$ e que $\hat{Q} = (\hat{f}, \hat{f}) = Q[1 - S(\bar{\omega})]$, esta última igualdade sugerindo que $S(\bar{\omega})$ é uma estimativa da quantidade de informação envolvida a uma dada frequência $\bar{\omega}$. Assim, o coeficiente de correlação espectral da série à qual foi filtrada a frequência $\bar{\omega}$ é zero, isto é, $\hat{S}(\bar{\omega}) = 0$.

A qualidade da filtração da série depende da qualidade da estimativa da intensidade do “power spectrum” na frequência seleccionada; assim Ferraz-Mello (1981) desaconselha o uso da estimativa baseada na DFT pois esta, em alguns casos, dá erros na ordem dos 50% ou até de ordem superior no caso de frequências bastante pequenas ($\ll 0.1$). A filtração é um processo importante pois é uma maneira de fazer uma escolha mais segura entre picos de altura semelhante e de discriminar entre os picos do espectro aqueles que correspondem a periodicidades independentes daqueles que são apenas réplicas dessas periodicidades.

E) Pure Discrete Fourier Transform (PDFE)

Esta transformada é definida apenas para séries temporais em que o intervalo τ entre quaisquer dados sucessivos é exactamente igual, isto é, $t_j = j\tau$ onde o intervalo de tempo analisado é dado por $T = N\tau$ sendo N o número de dados. As funções de modelação desta transformada são a função constante igual a 1 e as funções trigonométricas $\sqrt{2}\sin(\omega_k t)$ e $\sqrt{2}\cos(\omega_k t)$, onde são tomadas apenas as frequências ω_k que satisfazem a condição $\omega_k T = 2\pi k$ para os inteiros $1 \leq k \leq \frac{1}{2}N$. Se o N for par, a função seno é zero em todo o conjunto $\{t_k\}$, logo esta função não é incluída no conjunto das funções de modelação (Foster, 1996a).

Os coeficientes da projecção são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} coef(1) = \bar{x} = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i} \\ coef(\sqrt{2} \cos(\omega_k t)) = \frac{\sum \alpha_i \sqrt{2} \cos(\omega_k t_i) x_i}{\sum \alpha_i} \\ coef(\sqrt{2} \sin(\omega_k t)) = \frac{\sum \alpha_i \sqrt{2} \sin(\omega_k t_i) x_i}{\sum \alpha_i} \end{array} \right.$$

2.2.2.2 Análise de ondas

A análise de ondas mostra boas perspectivas como método de análise do período duma série temporal, particularmente na detecção da evolução temporal dos parâmetros que descrevem sinais periódicos e pseudoperiódicos tais como período, amplitude e fase (Foster, 1996b) pois esta análise foca a sua atenção em dados observados num intervalo limitado de tempo.

A) Discrete Wavelet Transform (DWT)

A *Wavelet Transform* para uma função de tempo contínua $x(t)$ é dada por

$$W(\omega, \tau; x(t)) = \omega^{1/2} \int x(t) f^*(\omega(t-\tau)) dt = \omega^{-1/2} \int x(\omega^{-1}z + \tau) f^*(z) dz$$

onde $z = \omega(t-\tau)$ e f^* é a função complexa conjugada de f , a onda de análise. A transformada depende de dois parâmetros: o factor escala ω que nesta definição toma o significado da frequência angular e o desfasamento de tempo τ .

Analogamente para uma série temporal com N valores observados $x(t_\alpha)$ no conjunto discreto de tempos $\{t_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\}$ temos a transformada discreta dada por

$$W(\omega, \tau; x(t)) = \sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_\alpha) f^*(\omega(t_\alpha - \tau)).$$

Consideremos a onda Gaussiana de modelação harmónica designada por onda de Morlet dada por $f(z) = e^{-c z^2} (e^{iz} - e^{-1/4 c}) = e^{-c \omega^2 (t-\tau)^2} (e^{i \omega(t-\tau)} - e^{-1/4 c})$ onde a constante c determina a velocidade de decrescimento da onda.

A constante $e^{-1/4 c}$ foi inserida para que a média da onda seja zero, isto é, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 0$. Geralmente a constante c é escolhida de forma a que o termo exponencial decresça significativamente num só ciclo $2\pi/\omega$. Para a análise de curvas de luz de estrelas variáveis, uma escolha popular para c é $1/8\pi^2$; no entanto esta constante pode ser tratada como um terceiro parâmetro do modelo.

Ignorando o termo $e^{-1/4 c}$ (geralmente o valor de c é bastante pequeno) obtemos a onda abreviada de Morlet dada por $f(z) = e^{iz - c z^2} = e^{i \omega(t-\tau) - c \omega^2 (t-\tau)^2}$, donde surge naturalmente a transformada abreviada de Morlet. Esta transformada é bastante semelhante à transformada de Fourier em janelas (com janela $e^{-c \omega^2 (t-\tau)^2}$). A diferença crucial entre estas duas transformadas é o factor ω na exponencial, o que faz com que o tamanho da janela seja dependente da frequência teste.

Adaptando a transformada abreviada de Morlet a uma série temporal definimos a *Discrete Wavelet Transform (DWT)*. As partes real e imaginária da DWT são:

$$\text{Re}(W) = \sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_{\alpha}) e^{-c \omega^2 (t_{\alpha} - \tau)^2} \cos(\omega(t_{\alpha} - \tau)) \text{ e}$$

$$\text{Im}(W) = -\sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_{\alpha}) e^{-c \omega^2 (t_{\alpha} - \tau)^2} \sin(\omega(t_{\alpha} - \tau)).$$

A resposta da DWT é avaliada através do cálculo do módulo da onda $|W|$ sendo também usual o cálculo da fase da onda dada por $\arg(W)$.

Constatou-se que esta transformada não é viável para a análise de séries temporais irregularmente espaçadas, pois depende fortemente do número de dados na vizinhança de τ (Foster, 1996b).

B) Scalegram

De forma análoga ao que acontece na análise de Fourier onde se procede à construção do periodograma, na análise de ondas podemos construir um “*scalegram*” dos coeficientes de $|W|^2$ como uma função de ω com τ fixo. Fazendo a média sobre τ obtemos o “*scalegram*” médio onde os picos correspondem à variabilidade de ω . Se uma forma específica da onda de análise corresponde à forma de variabilidade do sinal, a transformada apresenta um pico alto nos valores óptimos de ω e τ em comparação com outras funções.

Andronov (1998) sugere o passo $\Delta \log P \approx 0.01 (c/0.0125)^{1/2}$ para a construção do “*scalegram*” com τ fixo. Para o “*scalegram*” médio são sugeridos os passos $\Delta t \approx P/3$ para aproximações contínuas e $\Delta t \approx 0.311P$ para o caso simétrico discreto.

C) Discrete Wavelet Power (DWP)

A *Discrete Wavelet Power (DWP)* é uma modificação da DWT feita de forma a que o nível de ruído seja uniforme mesmo para dados irregularmente espaçados e é dada por

$$DWP = \frac{|W|^2}{S^2 \omega \sum_{\alpha=1}^N e^{-2c \omega^2 (t_{\alpha} - \tau)^2}} \text{ onde } S^2 \text{ é a variância estimada.}$$

Contudo, apesar da diminuição do nível de ruído, esta transformada não é melhor que a DWT a encontrar a frequência exacta do sinal (Foster, 1996b).

D) Discrete Wavelet Amplitude (DWA)

A resposta das transformadas DWT e DWP a sinais puramente periódicos é dependente da frequência. Este facto levou a outra modificação da DWT, a *Discrete Wavelet Amplitude (DWA)*, dada por

$$DWA = \omega \left| \sum_t e^{-c \omega^2 (t - \tau)^2} e^{-i \omega(t - \tau)} \right| = \sqrt{\omega} |W(\omega, \tau)|.$$

No entanto, a DWA não é bem comportada para o caso em que os dados são ruído aleatório pois o nível de ruído aumenta com o aumento da frequência (Foster, 1996b).

E) Wavelet Amplitude Function (WAF)

Outro problema com as transformadas descritas em **A**, **C** e **D** é a incapacidade de determinar a frequência exacta duma flutuação periódica. Com este fim, fez-se uma nova modificação da DWT que foi designada por *Wavelet Amplitude Function (WAF)* e

$$\text{que é dada por } WAF = \frac{|W|}{\omega \sqrt{\frac{c}{\pi}} \sum_{\alpha=1}^N e^{-c \omega^2 (t_\alpha - \tau)^2}} \sqrt{\frac{4c \omega}{\pi}}.$$

No entanto, para dados irregularmente espaçados a WAF só dá uma boa estimativa se for calculada para a frequência do sinal, pois esta dá valores bastante altos nas lacunas entre as observações. Assim, a WAF só deve ser usada para determinar a amplitude duma flutuação periódica após ter sido determinado o período utilizando outro método, por exemplo determinando o pico da DWT, da DWP ou da DWA, e mesmo assim, o valor de WAF só é viável durante as épocas de observação.

Para dados irregularmente espaçados nenhuma destas transformadas [**A** e **C – E**] são satisfatórias para a determinação quer do período quer da amplitude (Foster, 1996b).

F) Unabbreviated Wavelet Transform (UWT)

A transformada DWT tem uma desvantagem óbvia – a soma dos valores da onda de análise não é igual a zero e consequentemente o valor da transformada depende do valor médio do sinal (Andronov, 1998). Para evitar esta dependência foi sugerida a utilização dos desvios da média, $x_k - \bar{x}$, em vez de x_k , onde \bar{x} é a média local ponderada nos tempos de observação. A remoção desta média actua como uma ortogonalização parcial.

Esta modificação é chamada *Unabbreviated Wavelet Transform (UWT)* e tem um nível de ruído bastante mais baixo que a DWT nas frequências altas. No entanto, a UWT tem um nível de ruído consideravelmente mais alto que as transformadas WWZ e WWT (ver abaixo J) e I) respectivamente) para frequências altas (Andronov, 1998).

G) Mean-Removed Wavelet Transform (MWT)

Uma alternativa seria remover a média não-ponderada dos N dados observados em vez da sua média local ponderada obtendo a chamada *Mean-Removed Wavelet Transform (MWT)*. No entanto, uma vez que pode haver variações a longo prazo da média local, é recomendável o uso de UWT no lugar de MWT (Andronov, 1999).

H) Análise de ondas com compensação de dados

A análise de ondas com compensação de dados consiste na tentativa de encontrar a melhor modelação dos dados usando ondas, tomando em atenção os tempos de observação e as lacunas entre os dados.

É óbvio que o tratamento de dados irregularmente espaçados afecta até as estatísticas tais como a média pois esta torna-se dependente dos tempos de observação (Foster, 1996a). Com efeito, temos $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(t_i)$ onde N é o número de observações, $F(t_i)$

são os valores observados e t_i são os tempos em que se realizaram as observações. É óbvio que a média é fortemente dependente dos tempos de observação pois se a maioria das observações forem feitas quando o sinal for forte, a média será maior. Assim tornou-se imperativo o uso duma medida dependente da amostra de dados.

Um procedimento para a compensação de dados é tratar a análise como uma projecção (Foster, 1996b).

A projecção em geral calcula os coeficientes y_a de um conjunto de r funções teste $\phi_a(t)$ para o modelo da forma $y(t) = \sum_a y_a \phi_a(t)$ que melhor aproxima os dados (no sentido que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos).

Calculamos a projecção definindo o produto interno de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ como

$$(f, g) = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i f(t_i) g(t_i)}{\sum_{j=1}^N \alpha_j} \quad \text{onde } \alpha_i \text{ são os pesos estatísticos atribuídos aos dados}$$

correspondentes ao tempo t_i (na maior parte dos casos os pontos têm pesos estatísticos iguais). Depois calculamos a matriz S dada pelos produtos internos entre as funções teste, isto é, $S_{ab} = (\phi_a, \phi_b)$.

A determinação dos coeficientes que melhor se ajustam às funções teste é feita multiplicando a inversa da matriz S pelo vector dos produtos internos das funções teste com os dados, isto é, $y_a = \sum_b S_{ab}^{-1} (\phi_b, x)$.

A Potência (“Power”) que é utilizada para avaliar a projecção estatisticamente é dada por

$$P = \frac{N}{(r-1)S^2} \left(\sum_{a,b} S_{ab}^{-1} (\phi_a, x) (\phi_b, b) - (1(t), x)^2 \right)$$

onde N é o número de dados e S^2 é a variância estimada.

Quando tratamos a transformada DWT como uma projecção há duas abordagens possíveis: a transformada é uma projecção na função teste complexa dada por $\phi(t) = e^{i\omega(t-\tau) - c\omega^2(t-\tau)^2}$ ou a transformada é uma projecção ponderada na função teste $\phi(t) = e^{i\omega(t-\tau)}$ com os pesos estatísticos $\alpha_i = e^{-c\omega^2(t-\tau)^2}$. Em cada uma destas abordagens os coeficientes da projecção y_a e a significância estatística P serão diferentes.

Na segunda abordagem, em vez de N na definição de P temos o número efectivo de

$$\text{dados } N_{eff} \text{ dado por } N_{eff} = \frac{(\sum \alpha_i)^2}{(\sum \alpha_i^2)} = \frac{\left[\sum e^{-c\omega^2(t-\tau)^2} \right]^2}{\sum e^{-2c\omega^2(t-\tau)^2}}.$$

I) Weighted Wavelet Transform (WWT)

Fazendo a projecção ponderada com as funções teste $\phi_1(t) = 1(t) = 1$, $\phi_2(t) = \cos(\omega(t-\tau))$ e $\phi_3(t) = \sin(\omega(t-\tau))$ e com os pesos estatísticos referidos anteriormente, avaliamos a resposta procedendo ao cálculo de P onde se utiliza N_{eff}

em vez de N e $S_\omega^2 = \frac{N_{eff} V_x}{N_{eff} - 1}$ em vez de S^2 . V_x é a MSD ponderada (ver 2.1.1 – A) dos

$$\text{dados e é dada por } V_x = \frac{\sum_i \alpha_i x^2(t_i)}{\sum_j \alpha_j} - \left[\frac{\sum_i \alpha_i x(t_i)}{\sum_j \alpha_j} \right]^2 = (x, x) - (1(t), x)^2.$$

Analogamente define-se a MSD ponderada da função modelo V_y por

$$V_y = \frac{\sum_i \alpha_i y^2(t_i)}{\sum_j \alpha_j} - \left[\frac{\sum_i \alpha_i y(t_i)}{\sum_j \alpha_j} \right]^2 = (y, y) - (1(t), y)^2.$$

A *Weighted Wavelet Transform (WWT)* é então dada por $WWT = \frac{(N_{eff} - 1) V_y}{2V_x}$.

Para parâmetros fixos ω e τ , a WWT pode ser tratada como uma estatística qui-quadrado com dois graus de liberdade e valor esperado 1. Contudo isto só se verifica se os dados forem apenas ruído aleatório pois se o sinal for sinusoidal, o pico da WWT acontece a uma frequência inferior à frequência do sinal (Foster, 1996b). Isto deve-se ao facto de que para frequências mais baixas, a janela de análise é maior o que torna o valor N_{eff} maior e consequentemente WWT retorna um valor maior.

J) Weighted Wavelet Z-Transform (WWZ)

Para obter uma melhor estimação da frequência definiu-se a *Weighted Wavelet Z-Transform (WWZ)* por $Z = \frac{(N_{eff} - 3)V_y}{2(V_x - V_y)}$ que é menos sensível ao número efectivo de dados.

K) Weighted Wavelet Amplitude (WWA)

Apesar de WWZ ser um bom método para determinar a frequência do sinal, não é um bom estimador da amplitude. Assim, definiu-se a amplitude da flutuação periódica correspondente, WWA, como a raiz quadrada da soma dos quadrados dos coeficientes de expansão para as funções seno e coseno, isto é, $WWA = \sqrt{(y_2)^2 + (y_3)^2}$.

Segundo Foster (1996b) a combinação WWZ/WWA apresenta uma melhor performance para dados irregularmente espaçados, em comparação com os outros métodos descritos em 2.2.2.2, destacando-se com a diminuição da densidade de dados e/ou com o aumento da SNR. Claro que não tem sentido tentar encontrar o período e amplitude de um conjunto de observações em que há uma lacuna de dados maior que o período em questão.

Contudo o cálculo dos erros do período e da amplitude estimados por estes métodos é bastante complexo. Depois de achar o pico da frequência ω e os coeficientes das funções teste, definimos quatro funções teste ϕ_A com $A=1, \dots, 4$ dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= 1(t), & \phi_2(t) &= \cos(\omega(t - \tau)), & \phi_3(t) &= \sin(\omega(t - \tau)) & \text{e} \\ \phi_4(t) &= (t - \tau)[y_3 \cos(\omega(t - \tau)) - y_2 \sin(\omega(t - \tau))]. \end{aligned}$$

Depois calculamos a super-matriz Ω com entradas $\Omega_{AB} = (\phi_A, \phi_B)$, que é a matriz dos produtos internos ponderados destas funções teste. A variância dos resíduos estimada é dada por $S_{res}^2 = \frac{N_{eff}(V_x - V_y)}{N_{eff} - 3}$; as variâncias dos coeficientes da projecção são

proporcionais aos elementos das diagonais desta última matriz sendo dadas por $S_{y_A}^2 = N_{eff}^{-1} S_{res}^2 \Omega_{AA}^{-1}$ e a variância da frequência estimada é dada pela mesma equação com índice $A = 4$.

Contudo, estes erros não são muito fiáveis por uma diversidade de razões importantes: WWZ é uma projecção paramétrica, ou seja, depende dum parâmetro variável, a frequência, logo o comportamento estatístico não pode ser deduzido; para uma projecção ponderada a variância definida é apenas uma aproximação pois esta fórmula foi deduzida para uma projecção normal em que os pesos estatísticos são inversamente proporcionais à variância dos dados, tornando-se uma boa aproximação se o valor N_{eff} for grande e não tão boa se N_{eff} for pequeno; esta derivação veio da hipótese inicial falsa de que os dados correspondem a sinais puramente sinusoidais com ruído adicional.

Segundo Foster (1996b) a combinação WWZ/WWA é especialmente boa para descrever a evolução do período e amplitude de estrelas LPVs (ver 1.2.2). Para LPVs com bastantes observações é vantajoso experimentar uma constante de decaimento c pequena de forma a focar a atenção não num pequeno número de ciclos mas apenas num ciclo.

L) Função teste S

O agrupamento de dados produz efeitos fortes tais como o aumento de flutuações para frequências altas o que origina um decrescimento do número local de observações. Por

isso Andronov (1998) sugere a utilização da função teste $S = \frac{V_y}{V_x} = 1 - \frac{V_{x-y}}{V_x}$ onde V_x ,

V_y e V_{x-y} são respectivamente as MSD do sinal observado, do valor obtido no modelo e dos desvios entre os valores do sinal observado e do calculado. Obviamente temos a igualdade $V_x = V_y + V_{x-y}$.

Note-se que $WWT = \frac{N_{\text{eff}} - 1}{2} S$ e que $Z = \frac{N_{\text{eff}} - 3}{2} \frac{S}{1 - S}$.

2.2.3 Métodos de Alisamento por Aproximação Local

Sejam x_k os valores do sinal obtidos nos tempos t_k , $k = 1, \dots, N$. Nas aproximações locais os dados (t_k, x_k) onde $t_0 - \Delta t \leq t_k \leq t_0 + \Delta t$ são modelados por uma função $\varphi(t, t_0, \Delta t)$ que depende não só do instante t mas também do intervalo de aproximação. Contudo, espera-se que a função resultante dependa de um só argumento. Por isso, geralmente escolhe-se o valor calculado x_c no instante t_0 como o valor da função de alisamento quando $t = t_0$, isto é, $x_c(t_0) = \varphi(t_0, t_0, \Delta t)$.

Neste caso, Δt continua um parâmetro livre que determina as propriedades estatísticas e espectrais da função $x_c(t)$ para um conjunto fixo de dados (t_k, x_k) .

Nos casos mais frequentes de aproximação linear, a função φ pode ser escrita na forma

$$\varphi(t, t_0, \Delta t) = \sum_{\alpha=0}^m C_{\alpha}(t_0, \Delta t) f_{\alpha}(t - t_0)$$

onde f_{α} são funções de base e C_{α} são coeficientes que podem ser determinados, por exemplo, minimizando a soma ponderada dos resíduos dada por

$$\Phi(t_0, \Delta t) = \sum_{k=1}^n p_k u_k (x_k - \varphi(t_k, t_0, \Delta t))^2$$

onde os pesos u_k geralmente são indicadores da precisão σ_k das medições x_k e são dados por $u_k = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_k^2}$ onde σ_0 é um coeficiente escala que pode tomar um valor arbitrário positivo, pois não afecta a função de alisamento e as suas propriedades estatísticas (Andronov, 1997). Os pesos $p_k = p((t_k - t_0)/\Delta t)$ foram introduzidos para que a função de alisamento e a sua primeira derivada fossem contínuas.

A) Médias móveis (MA) e Parábolas móveis (RP)

No método das médias móveis (“Moving Average” – MA) assim como no método das médias móveis ponderadas temos que $m = 0$ logo há só um parâmetro a estimar, C_0 .

No método das parábolas móveis (“Running Parabolae” – RP) assim como no método das parábolas móveis ponderadas há três parâmetros a estimar, nomeadamente, C_0 , C_1 e C_2 .

Andronov (1997) usou as seguintes funções peso específicas:

$$p(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |z| > 1 \end{cases} \quad \text{para a modelação não ponderada e}$$

$$p(z) = \begin{cases} (1-z^2)^2 & \text{se } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |z| > 1 \end{cases} \quad \text{para a modelação ponderada.}$$

Como funções de base foram utilizados os polinómios $f_\alpha(z) = z^\alpha$.

O problema de minimizar a função $\Phi(t_0, \Delta t)$ para um dado conjunto de dados corresponde ao sistema de equações normais $\sum_{\alpha=0}^m A_{\alpha\beta} C_\alpha = \sum_{k=1}^n p_k u_k x_k f_\beta(t_k - t_0)$ onde

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^n p_k u_k f_\alpha(t_k - t_0) f_\beta(t_k - t_0).$$

Introduzindo um vector de valores $h[C_\alpha, k] = p_k u_k \sum_{\beta=0}^m A_{\alpha\beta}^{-1} f_\beta(t_k - t_0)$ podemos escrever

$$\text{os coeficientes, } C_\alpha, \text{ na forma } C_\alpha = \sum_{k=1}^n h[C_\alpha, k] x_k.$$

Uma vantagem apontada por Andronov (1997) ao método das parábolas móveis é que aproximando os dados dum intervalo $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ por uma parábola, as variações parabólicas e cúbicas vão ser modeladas exactamente para variações regularmente distribuídas no tempo. Para dados com lacunas, este método continua a se mostrar eficiente, contudo só um sinal parabólico poderá ser modelado exactamente.

Outra vantagem é que deste método resulta uma curva de aproximação suave com primeira derivada contínua e com uma melhor dependência entre a amplitude e a frequência. Isto permite a aplicação do método a processos cíclicos ou não-periódicos, particularmente para a determinação de extremos.

Geralmente o método das parábolas móveis é usado para aproximar individualmente cada ciclo.

B) Parábolas Assimptóticas (AP)

Este método é adequado para modelação das curvas que apresentem extremos assimétricos, ramos ascendentes e descendentes com declives bastante acentuados que ficam bastante distorcidas quando são aproximadas por outros métodos (Marsakova e Andronov, 1997). Temos como exemplos as curvas de luminosidade das variáveis pulsantes ou eclipsantes e as curvas de variação de fase em estrelas com mudanças de período abruptas (Marsakova e Andronov, 1996).

Esta aproximação tem dois parâmetros adicionais t_0 e Δt que caracterizam a posição e o comprimento da parte parabólica da curva e que podem ser calculados pelo método das correcções diferenciais.

De entre várias funções teste possíveis temos a função dada por

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z < -1 \\ \frac{1}{4}(1+z)^2 & -1 \leq z \leq 1 \\ z & z > 1 \end{cases}$$

onde $z = \frac{t-t_0}{\Delta t}$, que pode ser calculada rapidamente.

Comparando os métodos AP e RP, o método AP dá um menor erro de estimação para os momentos de extremo enquanto os extremos de luminosidade são modelados com maior precisão no método RP. Mesmo assim, é preferível a modelação pelo método AP para os extremos de LPVs, para dados com bastante ruído e com lacunas nas observações (Marsakova e Andronov, 1997).

C) Método dos Senos Móveis (Running Sine – RS)

Este método pode ser visto como um caso particular do alisamento por ondas com uma velocidade angular fixa w e uma função peso rectangular $p(z)$ em vez duma função peso gaussiana (Andronov, 1998).

Este método foi proposto por Chinarova et al (1994); à semelhança do que acontece nas outras aproximações locais, os dados no intervalo $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ são usados para o

cálculo da aproximação em t_0 dada por $m(t, t_0) = a_0(t_0) - \sum_{k=1}^j r_k(t_0) \cos(2\pi f_k(t - t_0))$

onde $a_0(t_0)$ é a luminosidade média, $r_k(t_0)$ são coeficientes determinados pelo método dos mínimos quadrados para valores fixos das frequências f_k . Geralmente utiliza-se $\Delta t = P/2$ onde P é o período. A função de alisamento é $m(t_0, t_0) = a_0(t_0)$.

A modelação usando senos móveis, tal como acontece com outros métodos de aproximação locais, é bastante sensível a lacunas nas observações (Andronov e Marsakova, 1999). Assim o valor calculado para um dado tempo t_0 geralmente só é aceite se: o número de pontos no subintervalo $[t_0 - 0.5\Delta t, t_0 + 0.5\Delta t]$ for superior a 3; se houver observações antes e depois do tempo t_0 ; o valor calculado estiver no intervalo desde $(1 + \alpha)x_{\min} - \alpha x_{\max}$ até $(1 + \alpha)x_{\max} - \alpha x_{\min}$ (geralmente utiliza-se $\alpha = 0.5$); a

estimativa do erro do valor calculado não exceder o desvio padrão dos valores observados.

Comparando este método com o método RP, na modelação usando o método RS não ocorrem variações rápidas nem máximos divididos logo esta modelação corresponde apenas às características médias das variações causadas pelo período principal (Andronov e Marsakova, 1999). O método RS é uma ferramenta eficaz para estudar variações lentas da média, amplitude e fase das pulsações.

2.2.4 Métodos não paramétricos

Estes métodos de análise espectral são baseados numa função de proximidade de pares consecutivos de observações em fase. Nestes métodos, ao contrário do que acontece nos modelos paramétricos, não é construída uma curva de alisamento, e assim os resultados não dependem da forma duma curva estabelecida pelo investigador (Andronov e Chinarova, 1997).

Dada uma série temporal $\{X(t_k), k = 1, \dots, n\}$, para cada frequência teste $f = \frac{1}{P}$ onde P é o período teste, é calculada a fase dada por $\varphi_k = \text{parte decimal}[(t_k - T_0)f]$, com $k = 1, \dots, n$, onde T_0 é a época inicial. Após estes cálculos, as observações são ordenadas por ordem crescente de fase, obtendo assim uma nova série

$$\{x_i = X(\varphi_i), \varphi_i \leq \varphi_{i+1}, i = 1, \dots, n\}.$$

Como os periodogramas resultantes da utilização de métodos não-paramétricos são descontínuos, estudam-se frequências bastante próximas, por exemplo, $\Delta f = \frac{\Delta \varphi}{(t_n - t_1)}$

onde se toma que $\Delta \varphi \approx \frac{1}{n}$ onde n é o número de dados.

A função teste não paramétrica mais conhecida foi desenvolvida por Lafler e Kinman (1965) e é dada por $\Theta = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$. Esta função depende da frequência teste e da época inicial T_0 . Para eliminar a dependência em T_0 fazemos o somatório de 1 a n incluindo os valores $\phi_{n+1} = 1 + \phi_1$ e $x_{n+1} = x_1$.

Para todas as modificações, podemos escrever a função teste na forma $\Theta = C \sum_{i=1}^n V_i$

onde C é um factor de escala que não afecta as variações relativas da função teste e V_i corresponde a uma determinada modificação.

Pondo $\Delta \varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ e $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ vemos que a modificação sugerida por Lafler e Kinman (1965) é dada por:

$$V_i = (\Delta x_i)^2 \quad (i).$$

Outras modificações sugeridas são:

$$V_i = (\Delta x_i)^2 + (\Delta \varphi_i)^2 \quad (ii)$$

$$V_i = (\Delta x_i / 2A)^2 + (\Delta \varphi_i)^2 \quad (iii)$$

$$V_i = (\Delta x_i)^2 / [(\Delta \varphi_i)^2 + \varepsilon^2] \quad (iv)$$

$$V_i = (\Delta x_i)^2 / (\Delta \varphi_i + \varepsilon) \quad (v)$$

$$V_i = [(\Delta x_i / 2A)^2 + (\Delta \varphi_i)^2]^{1/2} \quad (vi)$$

$$V_i = |\Delta x_i| \quad (vii)$$

onde $A = X_{\max} - X_{\min}$ e ε é um valor real qualquer.

Os periodogramas destas modificações vão ser bastante semelhantes, diferindo apenas na profundidade do mínimo e na largura do ruído.

Estas modificações podem ser divididas em dois subgrupos em que os elementos de cada subgrupo têm propriedades estatísticas semelhantes (Andronov e Chinarova, 1997) onde o primeiro subgrupo reúne as modificações (i)–(v) e o segundo subgrupo reúne as modificações (vi) e (vii).

É muito difícil (ou impossível) determinar analiticamente a expressão da distribuição dum função teste pois esta depende fortemente da distribuição do sinal e da presença dum componente periódico no sinal. Assim, torna-se impossível a validação dum período encontrado num periodograma pela estimação dum nível de certeza z_0 no espectro, tal como nos modelos paramétricos. Consequentemente para o cálculo do período fotométrico dum estrela variável utilizando modelos não-paramétricos foi sugerido o seguinte algoritmo:

- i) calcular o periodograma utilizando uma modificação de cada subgrupo;
- ii) escolher mínimos inferiores que um certo nível escolhido em cada periodograma;
- iii) ordená-los por ordem decrescente de profundidade;
- iv) representar graficamente as curvas de fase dos mínimos mais significativos e visualmente escolher o mínimo mais plausível com a forma da curva de luminosidade;
- v) escolher a frequência correspondente à melhor curva do conjunto de periodogramas.

Nem sempre a frequência real corresponde ao mínimo com maior profundidade.

2.3 Sumário dos métodos apresentados

Modelo matemático		Aplicações / Vantagens	Problemas
Análise no domínio do tempo		Correlograma	- fornece indicações úteis sobre as características duma série (e.g. padrão de sazonalidade)
		Modelo AR	- podemos escolher a ordem do modelo
Análise no domínio das frequências	Análise de Fourier	DFT	- boa determinação do período em séries irregularmente espaçadas se $SNR \leq 2.5$ - útil para obter uma primeira aproximação do valor do período (baixo custo computacional)
		Periodograma clássico	- utilizado para detectar a presença de periodicidade num sinal
		Periodograma modificado	- adequado para dados irregularmente espaçados
		DCDFT	- comparada com a DFT dá melhores estimativas para a frequência (se $SNR \leq 2.5$) e para a amplitude - permite a procura de frequências secundárias
			- difícil aplicação a séries temporais irregularmente espaçadas
			- difícil aplicação a séries temporais irregularmente espaçadas
			- mau desempenho em geral para séries irregularmente espaçadas
			- inadequado para séries irregularmente espaçadas - quando as lacunas são periódicas aparecem picos falsos no periodograma
			- maior custo computacional que a DFT

		PDFT	- cálculo simples	- tem aplicação apenas em séries regularmente espaçadas
Análise de ondas		DWT	- o tamanho da janela é independente da frequência	- a resposta a sinais puramente periódicos é dependente da frequência - o valor da transformada depende do valor médio do sinal - mau desempenho em séries irregularmente espaçadas
		Scalegram	- permite a visualização dos valores óptimos da frequência	
		DWP	- nível de ruído uniforme mesmo para dados irregularmente espaçados	- não permite encontrar a frequência exacta do sinal - a resposta a sinais puramente periódicos é dependente da frequência - mau desempenho para séries irregularmente espaçadas
		DWA	- bom desempenho para sinais puramente periódicos	- para dados aleatórios o nível de ruído aumenta com o aumento da frequência - mau desempenho para dados irregularmente espaçados

WAF	<ul style="list-style-type: none"> - permite encontrar a frequência exacta duma flutuação periódica - boa determinação da amplitude após a determinação do período utilizando outro método (e.g. DWT, DWP ou DWA) 	<ul style="list-style-type: none"> - mau desempenho para dados irregularmente espaçados (bastante sensível a lacunas) - o valor obtido pela WAF só é viável durante as épocas de observação
UWT	<ul style="list-style-type: none"> - comparada com a DFT tem um nível de ruído mais baixo para frequências altas - o valor da transformada não depende do valor médio do sinal - toma em conta as possíveis variações a longo prazo da média local 	<ul style="list-style-type: none"> - comparada com as transformadas WWT e WWZ tem um nível de ruído consideravelmente mais alto para frequências altas
MWT	<ul style="list-style-type: none"> - o valor da transformada não depende do valor médio do sinal 	<ul style="list-style-type: none"> - não tem em conta as possíveis variações a longo prazo da média local
WWT	<ul style="list-style-type: none"> - bom desempenho se os dados forem apenas ruído aleatório 	<ul style="list-style-type: none"> - se o sinal for sinusoidal o pico surge a uma frequência inferior à frequência do sinal
WWZ	<ul style="list-style-type: none"> - dá uma melhor estimação da frequência que a WWT 	<ul style="list-style-type: none"> - não dá uma boa estimação da amplitude - cálculo dos erros bastante complexo
WWA	<ul style="list-style-type: none"> - bom estimador da amplitude 	<ul style="list-style-type: none"> - cálculo dos erros bastante complexo - não dá uma boa estimação da frequência

Métodos de alisamento por aproximação local	Médias móveis	- só há um parâmetro a estimar	- bastante sensível a lacunas nas observações
	Parábolas móveis	- modelação exacta para dados regularmente espaçados com variações parabólicas e cúbicas - aplicação a processos cíclicos ou não periódicos para a determinação de extremos	- para dados com lacunas só um sinal parabólico poderá ser modelado exactamente
	Parábolas assimptóticas	- adequado para curvas com extremos assimétricos, ramos ascendentes e descendentes com declives bastante acentuados - comparado com o método das parábolas móveis dá um menor erro de estimação dos momentos de extremo - preferível ao método das parábolas móveis para a modelação de LPVs, para dados com bastante ruído e com lacunas nas observações	- comparado com o método das parábolas móveis dá um maior erro na estimação dos extremos de luminosidade
	Senos Móveis	- ferramenta eficaz para estudar variações lentas da média, amplitude e fase das pulsações	- bastante sensível a lacunas nas observações
Métodos não paramétricos		- não dependem da forma duma curva estabelecida pelo investigador	- é impossível a validação dum período pela estimação dum nível de certeza

3 Breve introdução ao projecto

A missão Hipparcos-Tycho levou à descoberta de cerca de 760 possíveis estrelas variáveis. São ainda desconhecidos ou incertos os seus padrões de variação, período e classificação destas estrelas. O objectivo deste projecto é a análise dos dados referentes a estas estrelas recolhidos nesta missão pela utilização de vários métodos, com o objectivo de determinar estas propriedades.

Contudo, para algumas destas estrelas existe um número extremamente pequeno de observações (cerca de 50) e portanto torna-se impossível chegar a resultados com precisão aceitável. Para a obtenção de resultados credíveis, pretende-se aumentar a amostra de dados destas estrelas, pela adição de observações existentes na base de dados do Observatório Astronómico da Universidade Estadual de Odessa e pela realização de observações no telescópio de 30 cm equipado com uma câmara CCD no Observatório Astronómico da Universidade da Madeira (Achada do Teixeira, Santana).

Bibliografia:

Kholopov P.N., Samus N.N., Frolov M.S., Goranskij V.P., Gorynya, N.A., Karitskaya E.A., Kazarovets E.V., Kireeva N.N., Kukarkina N.P., Kurochkin N.E., Medvedeva G.I., Pastukhova E.N., Perova N.B., Rastorguev A.S., Shugarov S.Yu, 1985, *General Catalogue of Variable Stars (GCVS)*, 4ª edição, Nauka Publishing House

Referências:

Andronov I.L., 1994a, *Astronomische Nachrichten*, 315, 353

Andronov I.L., 1994b, *Odessa Astronomical Publications*, 7, 49

Andronov I.L., 1997, *A&AS*, 125, 207

Andronov I.L., 1998, *Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel*, vol.14, nº6, pag.490

Andronov I.L., 1999, *Wavelet analysis of the irregularly spaced time series*, pag.57, in *Self-Similar Systems*, eds. V.B. Priezzhev and V.P. Spiridinov, JINR, Dubna, Russia

Andronov I.L., Chinarova L.L., 1997, *Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel*, vol.13, nº6, pag.67

Andronov I.L., Marsakova V.I., 1999, *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 18, 187

Burgasser A.J., Kirkpatrick J.D., Brown M.E., Reid I.N., Gizis J.E., Dahn C.C., Monet D.G., Beichman C.A., Liebert J., Cutri R.M., Skrutskie M.F., 1999, *ApJ*, 522, L65

Chinarova L.L., Andronov I.L., Schweitzer E., 1994, *Odessa Astronomical Publications*, 7, 103

Ferraz-Mello S., 1981, *AJ*, 86, 619

Foster G., 1995, *AJ*, 109, 1889

Foster G., 1996a, *AJ*, 111, 541

Foster G., 1996b, *AJ*, 112, 1709

Kirkpatrick J.D., Reid I.N., Liebert J., Cutri R.M., Nelson B., Beichman C.A., Dahn C.C., Monet D.G., Gizis J.E., Skrutskie M.F., 1999, *ApJ*, 519, 802

Kitchin C.R., 1995, *Optical Astronomical Spectroscopy*, Institute of Physics Publishing

Lafler J., Kinman T.D., 1965, *ApJS*, 11, 216

Marsakova V.I., Andronov I.L., 1996, *Odessa Astronomical Publications*, 9, 127

Marsakova V.I., Andronov I.L., 1997, *Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel*, vol.13, nº6, pag.49

Scargle J.D., 1981, *ApJS*, 45, 1

Scargle J.D., 1982, *ApJ*, 263, 835

Strohmeier W., 1972, *Variable Stars*, Pergamon Press